



Outils théoriques pour la gravitation expérimentale et applications aux interféromètres et cavités à ondes de matière.

Pacôme Delva

► To cite this version:

Pacôme Delva. Outils théoriques pour la gravitation expérimentale et applications aux interféromètres et cavités à ondes de matière.. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00268764

HAL Id: tel-00268764

<https://theses.hal.science/tel-00268764>

Submitted on 1 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire d'Étude du Rayonnement et de la Matière en Astrophysique

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité
« ASTROPHYSIQUE »

Présentée par
PACÔME DELVA

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

**OUTILS THÉORIQUES POUR LA GRAVITATION EXPÉRIMENTALE
ET APPLICATIONS AUX INTERFÉROMÈTRES ET CAVITÉS À ONDES
DE MATIÈRE**

soutenue le 14 décembre 2007

devant le jury composé de :

Pierre ENCRENAZ	Président du jury
Ernst RASEL	Rapporteur
Jean-Yves VINET	Rapporteur
Philippe BOUYER	Examineur
Serge REYNAUD	Examineur
Pierre TEYSSANDIER	Examineur
Marie-Christine ANGONIN	Directrice de thèse

À la mémoire de Philippe Turrenc

REMERCIEMENTS

JE voudrais d'abord remercier du fond du cœur Marie-Christine Angonin et Philippe Tourrenc d'avoir accepté d'encadrer mon travail de thèse pendant trois ans. Ils ont su se rendre disponible malgré leur lourde tâche d'enseignement. Ce fût toujours un grand plaisir de travailler ensemble. Philippe nous a malheureusement quitté prématurément. Cette thèse lui est dédiée car il y a beaucoup de lui, de ses idées et de ses enseignements, dans ce travail. Je remercie aussi Marie-Christine et Philippe de m'avoir montré la dimension humaine de la recherche. Celle-ci n'est pas une somme de travail et d'équations, mais est tissée de rapports humains, d'histoire et d'anecdotes.

Je remercie les membres de mon jury d'avoir accepté de lire attentivement mon travail : Pierre Encrenaz, Jean-Yves Vinet, Ernst Rasel, Serge Reynaud, Philippe Bouyer et Pierre Teyssandier.

Je remercie Pierre Teyssandier pour m'avoir fait partager son enseignement, et pour les corrections apportées au manuscrit ; Ernst Rasel pour m'avoir invité à l'Institut d'Optique Quantique à Hannovre, où j'ai été accueilli de la meilleure façon ; Pierre Encrenaz pour être à l'écoute des doctorants dont il a la charge à travers l'école doctorale ; Philippe Bouyer, Serge Reynaud, Arnaud Landragin, Marc-Thierry Jaekel, Brahim Lamine, Peter Wolf, Charles Antoine, Gilles Esposito-Farèse, Éricourgoulhon pour les discussions que nous avons eu au détour d'une conférence ou d'un café.

Je remercie les membres de l'ERGA de m'avoir fait partager le café dans la bibliothèque, même si je n'étais pas souvent présent : Béatrice Guibal, Annie Lemarchand, Jérôme Gariel, Gérard Le Denmat, Anne-Laure Melchior, Cécile Barbachoux, Gérard Gauron, Fabrice Deb-basch, Claire Chevalier, Françoise Tran-Minh, Jean-François Panis et Lydia Tchang-Brillet. Je remercie Bartolomé Coll pour les questions qu'il a fait germer dans mes recherches, et la bande des relativistes espagnols pour leur entrain et leur enthousiasme. Je remercie tous les doctorants avec qui j'ai partagé ces trois ans de thèse, avec des hauts et des bas ; en particulier Julien Bodossian, Jocelyn Couetdic, Hervé Manche, Serge Mouret, Jean-Christophe Mauduit, François Impens et les autres.

Je remercie sincèrement Denis Savoie et toute son équipe du Palais de la Découverte, qui m'ont formé à la médiation scientifique, pour leur bonne humeur, leur accueil et la confiance qu'ils m'ont accordé. Je remercie tous les permanents et bénévoles de Planète Sciences, et en

particulier Ivan Testart, Cédric Courson, Yann Bénétreau-Dupin et Thierry Seeman, pour tous les projets qu'on a pu mener ensemble et pour leur soif de transmettre notre passion commune, l'astronomie.

Je remercie ma famille et tous ceux qui m'ont soutenu pendant ces trois années. Enfin je remercie avec tout mon coeur Lise, mon amour, de m'avoir accompagné et soutenu dans cette difficile mais enrichissante épreuve qu'est la thèse.

Paris, le 9 janvier 2008.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
FORMULAIRE ET NOTATIONS	5
1 DÉVELOPPEMENTS ET RÉSULTATS DE LA GRAVITATION EXPÉRIMENTALE	9
1.1 LES FONDEMENTS THÉORIQUES	11
1.1.1 Les tests du principe d'équivalence	11
1.1.2 La recherche d'une violation de la loi newtonienne	15
1.1.3 Les tests dans le Système Solaire	16
1.1.4 L'entraînement des référentiels inertiels locaux	21
1.2 LES ONDES GRAVITATIONNELLES	24
1.2.1 Propriétés et ordres de grandeur	24
1.2.2 Une nouvelle fenêtre pour l'astronomie	27
I OUTILS THÉORIQUES POUR L'EXPÉRIMENTATION	35
2 LES RÉFÉRENTIELS LOCAUX	37
2.1 LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE D'EINSTEIN	39
2.1.1 Un peu de géométrie	39
2.1.2 Le référentiel inertiel local	41
2.2 LE RÉFÉRENTIEL DE FERMI	45
2.2.1 Le référentiel propre	45
2.2.2 Une extension du référentiel propre	50
2.2.3 Les coordonnées normales de Fermi	55
2.3 L'APPROXIMATION LINÉAIRE	57
2.3.1 Changements de coordonnées	57
2.3.2 La métrique post-newtonienne paramétrée (PPN)	60
2.3.3 Les ondes gravitationnelles	64

3	L'ÉQUATION DE KLEIN-GORDON ET SES DIFFÉRENTES UTILISATIONS	69
3.1	UNE ÉQUATION D'ONDE RELATIVISTE	71
3.1.1	Les origines de l'équation	71
3.1.2	Généralisation de l'équation de Klein-Gordon	72
3.2	LA PHASE PERTURBÉE	73
3.2.1	L'équation eikonale	73
3.2.2	La perturbation de la phase en champ faible	74
3.2.3	Interprétation des différents termes	75
3.3	LA LIMITE NON RELATIVISTE	78
3.3.1	L'équation de Schrödinger en champ faible	78
3.3.2	Quelques applications	80
II	ANALYSE DE QUELQUES EXPÉRIENCES	83
4	LE PROJET HYPER	85
4.1	DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE	87
4.2	LE RÉFÉRENTIEL TOURNANT	90
4.3	LA DIFFÉRENCE DE PHASE	93
5	DÉTECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES PAR INTERFÉROMÉTRIE	97
5.1	MISE EN BOUCHE	99
5.1.1	Un sujet récemment controversé	99
5.1.2	Des atomes rapides	101
5.2	LES INTERFÉROMÈTRES LIBRES	102
5.2.1	Interféromètre de Michelson-Morley	103
5.2.2	IOMs versus IOLs	106
5.3	LES INTERFÉROMÈTRES RIGIDES	108
5.3.1	Discussion sur les coordonnées « rigides »	109
5.3.2	L'interféromètre de Michelson-Morley	110
5.3.3	L'interféromètre de Ramsey-Bordé	112
5.4	LE BRUIT THERMIQUE	114
6	LES CAVITÉS À ONDES DE MATIÈRE	115
6.1	LA MÉTHODE DES PERTURBATIONS	119
6.2	LA PROBABILITÉ DE TRANSITION	120
6.2.1	Les expériences libres	121
6.2.2	Les expériences « rigides »	123
6.3	LA CAVITÉ CUBIQUE	125

6.3.1	La solution non perturbée	125
6.3.2	La cavité cubique libre	126
6.3.3	La cavité cubique « rigide »	128
6.4	LE POTENTIEL HARMONIQUE	131
6.4.1	La solution non perturbée	131
6.4.2	La probabilité d'absorption	132
6.5	QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS	133
CONCLUSION		135
A L'INTERFÉROMÈTRE DE RAMSEY-BORDÉ		137
B LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN		141
C TRADUCTION DE L'ARTICLE DE E. FERMI [105]		145
D ARTICLES		149

INTRODUCTION

LA gravitation relativiste a longtemps été considérée comme un domaine sans grandes applications concrètes. Après la naissance de la relativité générale, pendant la première moitié du XX^{ème} siècle, sa confirmation expérimentale était plutôt considérée comme un sujet annexe. Comme le disent [Misner *et al.* \[169\]](#) : la relativité générale était un paradis pour théoricien, mais un enfer pour expérimentateur. Ce sont pourtant deux tests expérimentaux qui l'ont fait connaître mondialement. Ses prédictions ont permis d'expliquer un phénomène depuis longtemps* inexpliqué : l'avance du périhélie de Mercure, et de prévoir la déviation de la lumière par le Soleil, qui a été observée (avec de larges barres d'erreur) dès 1919 par Eddington. Cependant, par la suite, la technologie disponible était insuffisante pour exploiter tout ce que la théorie avait à offrir en terme de tests expérimentaux.

Pour aller plus en détail, C. [Will \[239\]](#) divise l'histoire de la relativité moderne en quatre périodes. La « Génèse », de 1887 à 1919, contient les deux expériences fondatrices de la relativité restreinte, l'expérience de Michelson-Morley et l'expérience d'Eötvös, et les deux confirmations immédiates de la relativité générale dont nous avons parlé. Puis suit l'« Hibernation », de 1920 à 1959, pendant laquelle elle fut un peu oubliée. En 1959, [Pound et Rebka \[180\]](#) inaugurèrent l'« Âge d'Or » de la relativité générale, en confirmant le décalage gravitationnel de la lumière. Pendant cette période, de nombreux tests ont été menés en laboratoire et dans le système solaire, et la découverte de nouveaux « laboratoires » astrophysiques comme les pulsars ont permis d'écarter de nombreuses théories concurrentes[†]. L'« Âge d'Or » culmine en 1979 avec la découverte des mirages gravitationnels et la preuve indirecte de l'existence des Ondes Gravitationnelles (OG) par observation des pulsars[‡].

Enfin, depuis 1980, la discipline subit une transformation profonde. La relativité générale est devenue un sujet expérimental à part entière. Toute expérience de grande sensibilité et de haute précision doit désormais tenir compte et modéliser les effets perturbatifs relativistes (comme les réseaux de satellites de positionnement de type GNSS, par exemple) et réciproquement, de nouveaux tests de la relativité générale émergent grâce à de nouvelles

*Dès 1845, Le Verrier savait que la précession newtonienne de Mercure était en désaccord avec les observations d'environ 40" arc/siècle.

[†]On peut lire le livre grand public de C. [Will \[236\]](#) pour une revue de ces expériences.

[‡]La perte d'énergie par radiation gravitationnelle explique avec un très grand accord l'accélération de l'orbite des pulsars binaires. R. Hulse et J. Taylor ont reçu pour ces travaux le prix Nobel en 1993.

techniques expérimentales. Par exemple, les méthodes pour refroidir et piéger des atomes ont permis d'imaginer et d'effectuer de nouveaux tests du principe d'équivalence, de mesurer G , la constante de la gravitation, ou bien encore de fabriquer des senseurs inertiels très précis. Parallèlement à cela, les physiciens des particules et les physiciens atomiques s'intéressent de plus en plus à la gravitation. De nombreuses théories d'unification de la gravité et de la mécanique quantique prévoient une violation du principe d'équivalence.

La gravitation est sans doute l'interaction physique la moins bien connue empiriquement (la précision de la constante newtonienne G n'excède pas 10^{-4} aujourd'hui). La mesure de G et l'interprétation des expériences (la prise en compte des petites forces de toutes nature comme la force de Casimir) sont donc très importantes et sont l'objet de développements. Des questions ouvertes, comme l'existence d'une « cinquième force », l'anomalie Pioneer, la matière noire et l'énergie noire, pourraient nécessiter des modifications de la gravitation, que ce soit à de très courtes distances ou bien à l'échelle du système solaire, ou même de la galaxie.

Du fait des précisions requises, la gravitation expérimentale est aussi une science de grands projets, au sol comme dans l'espace. La construction des grands détecteurs d'ondes gravitationnelles (Virgo, Ligo, Lisa, ...) et les expériences spatiales (Microscope, GP-B, Step, Sagas, ...) représentent des efforts énormes du point de vue technologique, de la modélisation et de la théorie issus d'une vaste communauté qui sera mobilisée pour de nombreuses années. Les théoriciens de l'« ancienne école », qui ont une approche plus mathématique des problèmes en relativité générale, sont désormais accompagnés de théoriciens qui s'intéressent aux expériences pour les modéliser, prédire leurs résultats et proposer des développements futurs. Aujourd'hui, un article sur le détecteur d'OG franco-italien Virgo est signé par plus de 120 co-auteurs [10–12, 14, 15]; un article sur le détecteur américain LIGO est signé par plus de 400 co-auteurs, venant de 9 pays différents [2, 5]! On est alors proche du fonctionnement de la physique des particules.

Le problème essentiel de la relativité générale réside dans le fait que cette théorie n'est pas adaptée à la description d'expériences. Son formalisme est pratique pour prédire l'évolution d'une particule test, mais présente des difficultés pour la description d'un solide. D'autre part, la dépendance de la description d'un protocole expérimental aux coordonnées choisies ajoute à la difficulté pour faire le lien entre la mesure réelle et les prédictions théoriques. La mise au point d'un protocole systématique pour la description théorique des expériences relativistes, qui éviterait les modélisations ad-hoc et les débats nombreux qu'elles induisent, reste un objectif majeur de la communauté théoricienne.

Dans un premier temps, je vais faire un survol des différentes expériences de gravitation. Je m'attacherai à donner des ordres de grandeur pour chaque description de test, afin de montrer combien les précisions requises sont grandes, et pour mettre en valeur ces chiffres

qui représentent le lieu de convergence des théories et de l'expérience. Par la suite, j'introduirai, dans la partie I du manuscrit, les outils théoriques permettant d'étudier des expériences dans un champ de gravitation faible, en particulier dans une métrique PPN puis dans une métrique d'onde gravitationnelle. Nous appliquerons ces outils dans la partie II. Nous étudierons la sensibilité des interféromètres à ondes de matière à l'effet Lense-Thirring et aux ondes gravitationnelles, ainsi que la probabilité de transition d'une cavité à ondes de matière sous l'effet d'une onde gravitationnelle.

FORMULAIRE ET NOTATIONS

Notations

Les mêmes notations sont utilisés dans tout le manuscrit, sauf mention contraire. Nous utilisons la règle de sommation sur les indices répétés. La dérivée partielle est notée $()_{,\alpha} = \partial_\alpha() = \partial()/\partial x^\alpha$.

$\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$	entier compris entre 0 et 3
j, k, l, m, \dots	entier compris entre 1 et 3
r, s	entier égal à 1 ou 2
a	entier égal à 0 ou 3
c	symbole + ou \times (polarisations d'une onde gravitationnelle)
\mathcal{M}	variété pseudo-riemannienne de dimension quatre, espace-temps
$\mathcal{T}_P(\mathcal{M})$	espace tangent au point P
\mathbf{g}	métrique, forme bilinéaire de $\mathcal{T}_P(M) \times \mathcal{T}_P(M) \rightarrow \mathbb{R}$
$\boldsymbol{\eta}$	métrique de Minkowski
\mathbf{x}	système de coordonnées, application définie sur un ouvert de \mathcal{M} , bijective et bicontinue
$\mathbf{e}_\alpha \equiv \{\partial_\alpha\}_P$	vecteur du repère naturel associé à \mathbf{x} au point P
$(\mathbf{e}_\alpha) \equiv (\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=0..3}$	repère naturel
$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta)$	composantes de la métrique dans le repère naturel associé à \mathbf{x}
$\mathbf{x} \equiv (ct, x^i)$	système de coordonnées quelconque
$s = c\tau$	distance propre (s), temps propre (τ)
$\mathcal{C} : x^\mu = f^\mu(s)$	trajectoire d'un observateur, courbe de l'espace-temps paramétrée par s
$\bar{()}$	valeur d'une application en un point, ou bien le long de \mathcal{C}
$u^\alpha = df^\alpha/ds$	composantes de la quadri-vitesse de l'observateur
$\gamma^\alpha = du^\alpha/ds$	composantes de l'accélération de l'observateur
$v^i = dx^i/dt$	composantes de la vitesse newtonienne
$v = \ \vec{v}\ $	norme de la vitesse newtonienne
$a^i = dv^i/dt$	accélération newtonienne

$\mathbf{X} \equiv (cT, X^i)$	système de coordonnées local ou de Fermi
$(\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}) \equiv (\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}=0..3}$	repère naturel associé à \mathbf{X}
$(\mathbf{e}_j) \equiv (\mathbf{e}_j)_{j=1..3}$	repère spatial
Ψ	fonction d'onde relativiste
Φ	fonction d'onde de Schrödinger
ϕ	phase de l'onde
$p^\alpha = \hbar g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$	quadri-impulsion
$k^\alpha = p^\alpha / \hbar$	quadri-vecteur d'onde
V	$= c$ pour une onde lumineuse, $= v_a$ pour une onde de matière
v_a	vitesse de groupe de l'onde de matière
c	vitesse de la lumière
γ_{v_a}	$= (1 - v_a^2/c^2)^{-1/2}$
γ_c	$= 1$
G	constante de la gravitation
\hbar	constante de Planck ($\hbar = h/2\pi$)
$\lambda_a = h/p$	longueur d'onde de de Broglie
λ_l	longueur d'onde lumineuse
$\lambda_C = h/mc$	longueur d'onde de Compton ($\bar{\lambda}_C = \lambda_C/2\pi$)
$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$	connection de Levi-Civita
∇	dérivation covariante
$R^\mu_{\alpha\nu\beta}$	tenseur de Riemann
$R^\mu_{\nu} = R^\mu_{\alpha\nu\alpha}$	tenseur de Ricci
$R = R^\mu_{\mu}$	scalaire de courbure
$\epsilon_{\alpha\beta\dots}$	symbole de Levi-Civita
$K_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}$	composantes de la perturbation de la métrique

Petit formulaire

Les symboles de Christoffel

Définition : $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2} \cdot g^{\sigma\rho} (g_{\alpha\rho,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho})$

Symétries : $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}$

Relations : $\Gamma_{\alpha\beta\mu} + \Gamma_{\beta\alpha\mu} = g_{\alpha\beta,\mu}$ où $\Gamma_{\alpha\beta\mu} = g_{\alpha\rho} \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}$

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha,\beta} - \Gamma_{\mu\nu\beta,\alpha} = \frac{1}{2} \cdot (g_{\mu\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\beta,\mu\alpha} - g_{\nu\alpha,\mu\beta} - g_{\mu\beta,\nu\alpha})$$

Tenseur de Riemann

Définition* : $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\rho} + \Gamma_{\beta\rho}^{\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\rho}$

Symétries : $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu}$

Contraction d'indices

$$g = \det g_{\alpha\beta}$$

$$g_{,\alpha} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}$$

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\rho} = (\ln \sqrt{-g})_{,\alpha}$$

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\alpha\rho})_{,\rho}$$

Opérateurs usuels sur \mathbb{R}^3

Divergence : $\nabla A \equiv \partial_k A^k$

Rotationnel : $(\nabla \wedge A)^i \equiv \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$

Opérateurs usuels sur \mathcal{M}

Dérivée covariante : $\nabla_{\sigma} A^{\alpha}_{\beta} = \partial_{\sigma} A^{\alpha}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} A^{\rho}_{\beta} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} A^{\alpha}_{\rho}$

d'Alembertien : $\square = \nabla^{\alpha} \nabla_{\alpha} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}$

Pour un scalaire : $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\beta})$

Symbole de Levi-Civita

Définition :

$$\epsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{pour } ijk\dots \text{ permutation paire de } 123\dots \\ -1 & \text{pour } ijk\dots \text{ permutation impaire de } 123\dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Relations pour le symbole d'ordre trois : $\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijb} = 2\delta_b^k$ et $\epsilon^{ijk} \epsilon_{iab} = \delta_a^j \delta_b^k - \delta_b^j \delta_a^k$

* Attention, la convention avec un signe contraire est souvent choisie (voir [169]).

Champ faible

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \iff g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}, \text{ où } h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\rho} h_{\delta\rho}$$

$$g = \det g_{\alpha\beta} = -(1 + h_{\alpha}{}^{\alpha})$$

Les unités géométriques

Nous utilisons parfois les unités géométriques $c = G = 1$. La dimension d'une masse M_g est alors une longueur, la dimension d'un moment angulaire J_g une longueur au carré, une vitesse V_g est sans dimension. Pour rétablir les dimensions usuelles :

$$M = \frac{c^2}{G} M_g ; J = \frac{c^3}{G} J_g ; V = c V_g .$$

DÉVELOPPEMENTS ET RÉSULTATS DE LA GRAVITATION EXPÉRIMENTALE

1

SOMMAIRE

1.1	LES FONDEMENTS THÉORIQUES	11
1.1.1	Les tests du principe d'équivalence	11
1.1.2	La recherche d'une violation de la loi newtonienne	15
1.1.3	Les tests dans le Système Solaire	16
1.1.4	L'entraînement des référentiels inertiels locaux	21
1.2	LES ONDES GRAVITATIONNELLES	24
1.2.1	Propriétés et ordres de grandeur	24
1.2.2	Une nouvelle fenêtre pour l'astronomie	27

1.1 Les fondements théoriques

1.1.1 Les tests du principe d'équivalence

Dans le chapitre 2 nous introduirons de manière détaillée les implications du principe d'équivalence d'Einstein. Pour classer les tests expérimentaux il est utile de séparer ce principe en trois sous-principes :

1. Le principe d'équivalence faible : la trajectoire d'un corps d'épreuve* en chute libre est indépendante de sa structure interne et de sa composition.
2. Le résultat d'une expérience (non gravitationnelle) est indépendant de la vitesse du référentiel local en chute libre non tournant dans lequel elle est effectuée (Invariance Locale de Lorentz ILL).
3. Le résultat d'une expérience (non gravitationnelle) effectuée dans un référentiel local en chute libre non tournant est indépendant de où et quand dans l'univers elle est effectuée (Invariance Locale de Position ILP).

Le principe d'équivalence faible Pour quantifier les déviations possibles à ce principe, il faut supposer que la masse inertielle d'un corps, m_I , peut être différente de sa masse grave, m_G . Dans un champ gravitationnel \vec{g} , son accélération \vec{a} est donnée par $m_I \vec{a} = m_G \vec{g}$. Maintenant, si on prend un deuxième corps dans le même champ gravitationnel, il doit tomber de la même façon suivant le principe d'équivalence faible. On introduit alors le rapport d'Eötvös :

$$\eta = 2 \frac{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\|}{\|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\|}, \quad (1.1)$$

qui donne une limite supérieure quantitative à la violation du principe d'équivalence faible.

Les premières mesures précises de η ont été faites en comparant les périodes de deux pendules de masses et de compositions différentes, méthode décrite par Galilée en 1638 [172]. Ces expériences ont été conduites par Newton (1686), Bessel (1826) et Potter (1920), avec $\eta \sim 10^{-3} - 10^{-5}$. L'invention de la balance de torsion par Eötvös autour de 1888 entraîna un grand saut en sensibilité. Dans cette expérience, la différence entre masse grave et masse inertielle implique une torsion de la balance. Dans un article publié en 1922, trois ans après la mort d'Eötvös, sa précision atteint $\eta \sim 5 \cdot 10^{-9}$. Ce résultat ne fut dépassé que dans les années 1960-70, avec les expériences de Dicke [189] et Braginsky [56], pour atteindre respectivement $\eta \sim 10^{-11}$ et $\eta \sim 10^{-12}$. La balance de torsion la plus précise aujourd'hui

*Un corps d'épreuve n'est pas chargé et n'a pas de spin, il ne subit pas de forces extérieures telles que des forces électromagnétiques et n'est pas affecté par des forces de marées.

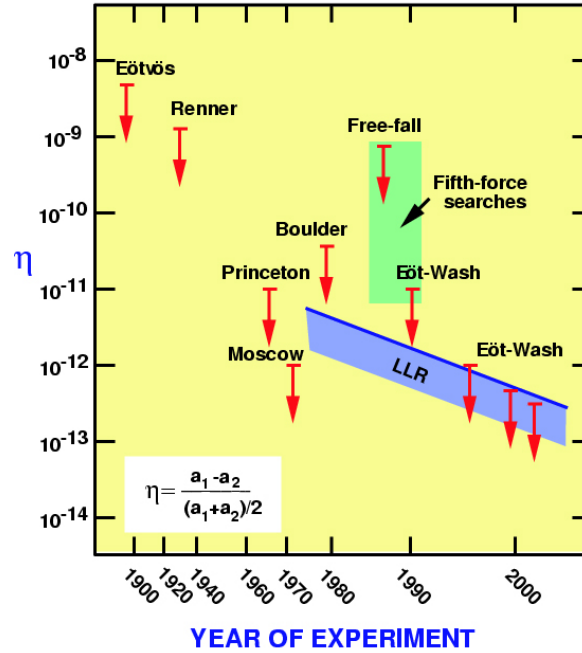


FIG. 1.1 — Quelques tests du principe d'équivalence faible. La région verte représente des tests de recherche d'une « cinquième force », pouvant aussi être interprété comme des tests du principe d'équivalence faible. Cette figure est reprise de l'article [239].

est celle de « Eöt-Wash », du groupe de E. Adelberger à l'Université de Washington. Ils ont atteint $\eta \sim 3 \cdot 10^{-13}$. Plusieurs autres méthodes existent : les expériences de chute libre et la télémétrie Laser Lune* (Lunar Laser Ranging LLR). Les résultats de quelques tests sont résumés sur la figure 1.1. Pour une revue des tests du principe d'équivalence on peut lire l'article [172].

Plusieurs expériences spatiales sont proposées pour améliorer la précision sur η . MICRO-SOPE[†], MICRO-Satellite à Trainée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence, est un satellite développé par le CNES, contenant deux accéléromètres différentiels, ayant pour but $\eta \sim 10^{-15}$. Il pourrait être lancé au début de l'année 2008. STEP[‡] est un projet de la NASA et de l'ESA, ayant pour but $\eta \sim 10^{-18}$, qui est une version améliorée de MICROSCOPE. Un concept un peu différent est utilisé pour le projet de l'Agence Spatiale Italienne, Galileo Galilei[§], qui embarquera un accélérateur différentiel en rotation rapide. Il devrait atteindre une précision de $\eta \sim 10^{-17}$.

*Des réflecteurs optiques ont été déposés sur la Lune par les missions américaines Apollo 11, 14 et 15, et les sondes soviétiques Lunakhod 17 et 21. Une impulsion laser est envoyée vers un des réflecteur, et une partie est recueillie à l'aide d'un télescope. Connaissant la vitesse de la lumière (et quelques autre paramètres...), la distance de la Lune est connue avec une précision de l'ordre du centimètre [243]

[†]<http://smc.cnes.fr/MICROSCOPE/>

[‡]<http://einstein.stanford.edu/STEP/>

[§]<http://eotvos.dm.unipi.it/>

La physique atomique va jouer un nouveau rôle dans l'histoire des tests du principe d'équivalence faible, en apportant une vérification au niveau microscopique. Plusieurs projets proposent d'utiliser des sources d'atomes très refroidies, voire des condensats de Bose-Einstein, pour réaliser des interféromètres atomiques. Les sources d'atomes peuvent être préparées avec deux espèces différentes, qui sont alors superposées. Une expérience de ce type a été réalisée par [Fray *et al.* \[115\]](#), avec $\eta \sim 10^{-7}$. [Dimopoulos *et al.* \[96\]](#) proposent une amélioration de cette expérience en utilisant un interféromètre atomique de 10 mètres de long. La précision d'un tel test n'est pas encore bien maîtrisée, car des effets perturbateurs sont à prendre en compte, comme les collisions entre atomes ou bien le bruit lié à l'environnement. ICE, Interféromètre à source Cohérente pour l'Espace [\[175\]](#), est un projet de l'IOTA et du LNE-SYRTE soutenu par le CNES qui a pour but de tester le principe d'équivalence. La source d'atome est actuellement en phase de test dans des vols zéro-g [\[223\]](#). Une mission spatiale a aussi été proposée dans ce sens pour l'appel à projet du Cosmic Vision 2015-2025 de l'ESA* : MWE (Matter Wave Explorer of Gravity).

Tests de l'ILL Les tests de l'invariance locale de Lorentz sont motivés par le fait que les théories de gravité quantique, comme les théories des cordes, prévoient une violation de cette invariance. Nous ne détaillerons pas tous les tests, nombreux, qui ont été effectués, ni tous les cadres théoriques qui existent mais on peut trouver une revue mise à jour régulièrement par [Mattingly \[163\]](#). Le cadre théorique le plus simple est le formalisme c^2 : il prévoit une différence de la vitesse d'une onde électromagnétique c , par rapport à la vitesse limite c_0 d'une particule massive, résumée dans le facteur $\delta = |(c_0/c)^2 - 1|$. Une telle violation nécessite l'existence d'un référentiel privilégié.

Une violation de l'ILL causerait un décalage des niveaux d'énergie d'une particule, qui dépend de l'orientation de l'axe de quantification et du nombre quantique de l'état. Les expériences d'« anisotropie d'horloges » vérifient que ce décalage est nul. Les premières expériences ont été faites par [Hughes *et al.* \[135\]](#) et [Drever \[97\]](#). Les résultats sur δ sont reportés sur la figure 1.2. Le refroidissement d'atomes et d'ions piégés a ensuite permis de limiter les effets des collisions, ce qui augmente encore la précision des expériences. Sur la figure 1.2 sont reportés les résultats de l'équipe du NIST (National Institute of Standards and Technologies) [\[182\]](#), de l'Université de Washington [\[150\]](#), et de l'Université de Harvard [\[71\]](#). Citons aussi l'expérience du LNE-SYRTE [\[245\]](#), qui est une analyse des fréquences de transition dans une horloge atomique de Césium. L'étude de cette expérience est effectuée dans le cadre plus large de l'Extension du Modèle Standard [\[79\]](#), qui contient dans sa forme minimale 19 paramètres pour le photon, puis 44 paramètres par particule.

D'autres méthodes existent pour tester l'ILL. Par exemple, les expériences de type

*<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=100>

Michelson-Morley, avec ses nombreuses variantes, dont une revue est faite dans l'article [132] ; citons l'expérience de Brillet-Hall [58], qui utilise un interféromètre de Fabry-Perot, et les expériences comparant les fréquences de cavités électromagnétiques entre elles, ou avec des horloges atomiques [203, 244].

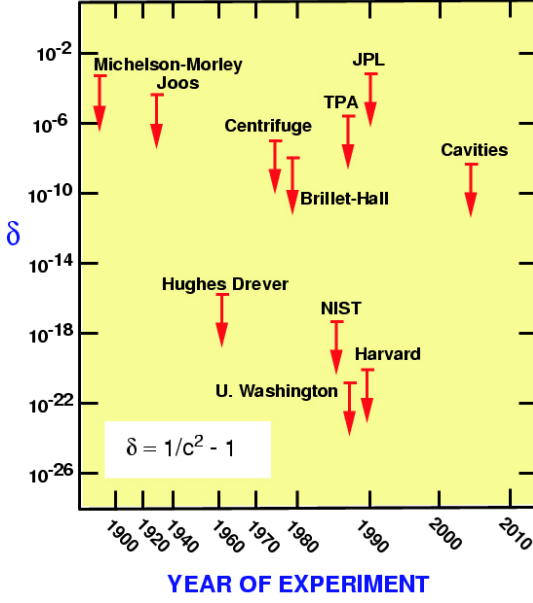


FIG. 1.2 — Quelques tests de l'invariance locale de Lorentz. Cette figure est reprise de l'article [239].

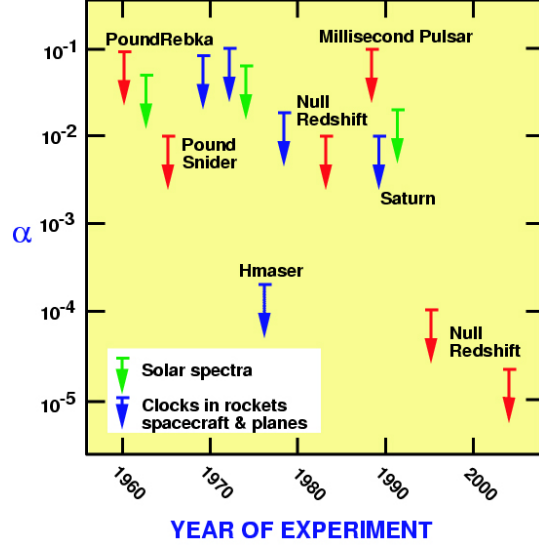


FIG. 1.3 — Quelques tests de l'invariance locale de position. Cette figure est reprise de l'article [239].

Tests de l'ILP L'invariance locale de position peut être testée par les expériences de décalage gravitationnel, proposées initialement par Einstein. Il suffit de mesurer le décalage en fréquence, $Z = \Delta\nu/\nu$, entre deux horloges identiques placées à des endroits différents dans un champ gravitationnel statique*. On obtient alors $Z = \Delta U/c^2$, où ΔU est la différence du potentiel gravitationnel entre le receveur et l'émetteur. La violation de l'ILP est quantifiée par la valeur α , qui est telle que $Z = (1 + \alpha)\Delta U/c^2$.

Les premières expériences de haute précision sont celles de Pound-Rebka-Snider [180, 181]. D'autres expériences mesurent le décalage des lignes spectrales du Soleil, ou bien les différences entre horloges atomiques embarquées à bord d'avion, de fusée ou de satellite. Ces expériences sont résumées sur la figure 1.3. La limite la plus précise, effectuée en comparant

*Il faut noter que cette expérience revient à comparer les vitesses de deux référentiels inertiels locaux : le premier au repos par rapport à une des horloges au moment de l'émission du signal, et le second au repos par rapport à l'autre horloge au moment de la réception du signal. Le décalage de fréquence entre les deux horloges est alors une conséquence du décalage Doppler entre les deux référentiels inertiels locaux.

une horloge atomique de Césium avec un Maser à hydrogène pendant une année [39], est $|\alpha^H - \alpha^{Cs}| < 2.1 \cdot 10^{-5}$.

L'ILP implique aussi une invariance de la position dans le temps. Ainsi, les constantes fondamentales de la physique non gravitationnelle doivent être constantes avec le temps si l'ILP est satisfaite. Pour une revue des expériences et des idées théoriques concernant ce sujet on peut lire l'article de Uzan [221].

1.1.2 La recherche d'une violation de la loi newtonienne

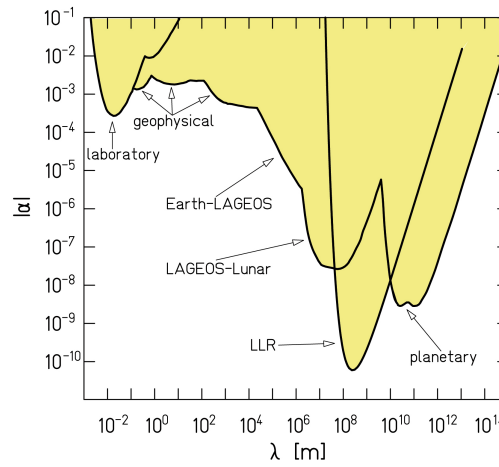


FIG. 1.4 — Existence d'une « cinquième force », basée sur l'addition d'un potentiel de Yukawa de force α et de portée λ . Cette figure est reprise de l'article [16].

La « cinquième force » Au milieu des années 1980 commença la recherche d'une « cinquième force ». Un certain nombre de considérations pratiques aussi bien que théoriques justifie d'interpréter ces expériences par l'addition d'un potentiel de Yukawa au potentiel gravitationnel newtonien :

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left[1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right],$$

où α est la force de la nouvelle interaction, non dimensionnée, et λ est sa portée. Cette loi implique une violation du principe d'équivalence si α et/ou λ dépendent des corps ou des lieux où sont réalisées les expériences. Sur la figure 1.4 sont résumées les différentes expériences, qui ont permis d'exclure de grandes régions pour α et λ [16]. Entre 1 et 10^4 m, des expériences de laboratoires similaires à celles pour vérifier le principe d'équivalence faible ont contraint le modèle, comme les expériences de chute libre ou bien celle d'« Eöt-Wash ». Des mesures de gravimétrie, combinées à des modèles géophysiques, ont aussi été utilisées.

Pour des échelles intermédiaires, entre environ 10^4 et 10^{16} m, plusieurs méthodes ont été mises en œuvre : la télémétrie Laser Lune, l'analyse des orbites des satellites LAGEOS ou bien des planètes du Système Solaire [206]. Avec ces données, un consensus a émergé qu'il n'y a pas de preuve expérimentale pour une force de type Yukawa d'une portée d'environ 10^{-3} à 10^{16} m. Par contre, la question reste ouverte pour des interactions de portée inférieure au millimètre, ou supérieure à l'année-lumière. De plus, l'anomalie Pioneer pourrait s'expliquer par une modification à l'échelle du système solaire [136, 186].

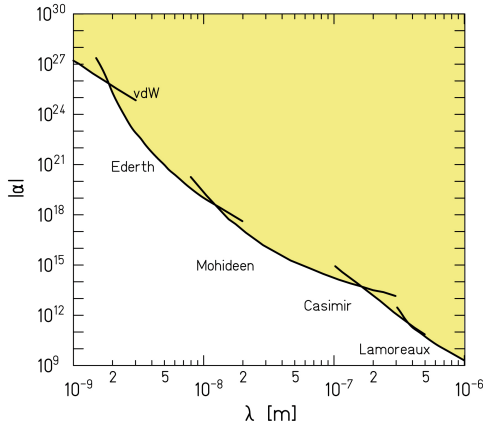


FIG. 1.5 — Contraintes sur le potentiel de Yukawa pour des portées entre 1 nm et 1 μ m. Cette figure est reprise de l'article [16].

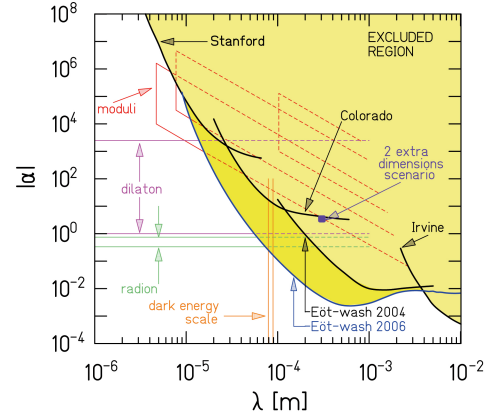


FIG. 1.6 — Contraintes sur le potentiel de Yukawa pour des portées entre 1 μ m et 1 cm. Quelques prédictions théoriques sont indiquées. Cette figure est reprise de l'article [138].

Modifications à courte portée Des expériences pour tester le principe d'équivalence faible, comme les balances de torsion, ont été adaptées pour contraindre le potentiel de Yukawa entre le μ m et le cm (figure 1.6). En deçà du μ m, il faut faire appel à des techniques sophistiquées pour distinguer les interactions gravitationnelles de la force de Casimir [89, 90, 133, 146], effet quantique (figure 1.5).

1.1.3 Les tests dans le Système Solaire

Dans le système solaire, la comparaison des théories métriques de la gravitation peut se faire dans le cadre du formalisme post-newtonien paramétrisé (PPN) [238, 239]. Nous en ferons une introduction détaillée dans la section 2.3.2. C'est une approximation en champ faible et à petite vitesse, pour les systèmes de corps auto-gravitants. Elle contient dix paramètres* : γ , β , ξ , α_1 , ..., ζ_4 . Nous résumons dans le tableau 1.1 leur interprétation physique et leur valeur pour la théorie de la relativité générale.

*Le nombre de paramètres n'est pas limité par des arguments théoriques.

Paramètre	Interprétation	Valeur en Relativité Générale
γ	Quelle quantité de courbure (g_{jk}) est produite par unité de masse ?	1
β	Combien de « non-linéarité » dans la loi de superposition pour la gravité (g_{00})	1
ξ	Effet de position privilégié ?	0
α_1	Effet de référentiel privilégié ?	0
α_2		0
α_3		0
α_3		0
ζ_1	Violation de la conservation de l'impulsion totale ?	0
ζ_2		0
ζ_3		0
ζ_4		0

TAB. 1.1 – Les paramètres PPN et leur interprétation [239].

Pour une revue des théories métriques alternatives à la relativité générale on peut se référer au livre de C. Will [238]. Les meilleures limites sur les différents paramètres du formalisme sont reportées dans le tableau 1.2.

Les tests du paramètre γ La prédiction de la déviation de la lumière par le Soleil fut l'un des grands succès d'Einstein. L'expérience d'Eddington, qui observa une étoile lors d'une éclipse solaire, confirma la déviation de la lumière mais la précision des mesures était très mauvaise. Les résultats de ce type d'expérience ont varié entre la moitié et le double de la valeur de la relativité générale. Il faut attendre le développement de l'interférométrie radio, et plus tard du VLBI (Very Long Baseline radio Interferometry), pour avoir des mesures précises. Une série de mesures entre 1969 et 1975 a profité du passage de la ligne de visée de groupes de quasars à proximité du Soleil. Aujourd'hui, Les observations du VLBI sont sensibles à la déviation de la lumière sur presque toute la sphère céleste. En 2004, l'analyse d'environ deux millions d'observations du VLBI, produites par 87 sites différents et provenant de 541 sources radio, a atteint une précision d'environ $4.5 \cdot 10^{-4}$ sur le paramètre $(1 + \gamma)/2$ [198]. L'analyse des observations astrométriques d'Hipparcos atteint une précision d'environ 0.3 % sur le même paramètre [116]. Enfin, la déviation de la lumière par Jupiter, d'environ 300 μ arcs, a été observée par le VLBI avec une précision de l'ordre de 50 % [216]. Les différentes mesures de $(1 + \gamma)/2$ avec leurs précisions sont résumées sur la figure 1.7.

En 1964, Irwin Shapiro proposa un nouveau test de la relativité générale : un signal électromagnétique envoyé à travers le système solaire, depuis la Terre vers une planète ou

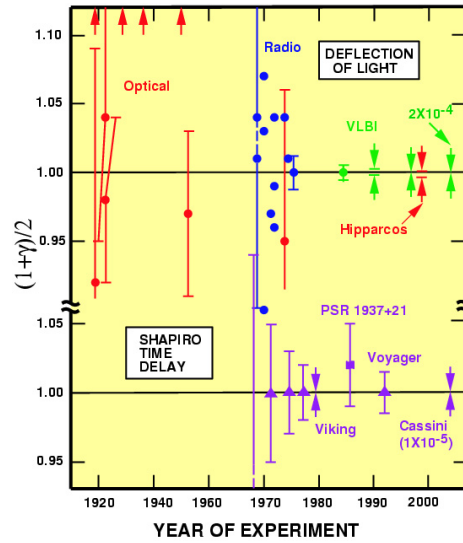


FIG. 1.7 – Mesures du paramètre $(1 + \gamma)/2$, déduites de la déviation de la lumière et de l'effet Shapiro. Cette figure est reprise de l'article [239].

un satellite, et rasant le Soleil, subit un délai causé par la masse du Soleil, et qui dépend de γ . Ainsi, γ se déduit par télémétrie laser lorsque la ligne de visée de la cible passe près du Soleil. Les cibles utilisées sont nombreuses : les planètes, comme Mercure ou Vénus (radar passif) ; les satellites artificiels, comme Mariner 6 et 7, Voyager 2, les sondes Viking, ou encore Cassini (radar actif). Les résultats de ces expériences (ainsi que la mesure déduite du délai sur le signal du pulsar PSR 1937+21) sont résumés sur la figure 1.7. La mesure la plus précise aujourd'hui est celle faite grâce à la sonde Cassini par Bertotti *et al.*, avec une précision sur γ d'environ $2 \cdot 10^{-5}$ [44].

Le lancement du satellite Gaia*, un projet de l'ESA, est prévu pour 2011. Cette mission d'astrométrie de très haute précision va observer environ 10^9 astres. En choisissant les 10^6 astres les plus stables, sur cinq ans, la précision sur γ pourrait atteindre $2 \cdot 10^{-7}$ [224]. LATOR, Laser Astrometric Test Of Relativity, est un projet de deux micro-satellites orbitant autour du Soleil. Par télémétrie, cette mission pourrait atteindre une précision de 10^{-8} sur γ [217, 218].

L'avance du périhélie de Mercure L'accord entre l'avance du périhélie de Mercure prédit par la Relativité Générale et les observations fut un autre succès de la relativité générale. La valeur de cette avance par rapport à la théorie newtonienne est de 43 secondes d'arc par siècle. D'après des observations radar de Mercure prises entre 1966 et 1990, elle est connue avec une précision d'environ 0.1 % [197]. Cela permet de trouver la limite $|2\gamma - \beta - 1| < 3 \cdot 10^{-3}$. L'obtention de cette limite nécessite la connaissance du moment dipolaire J_2 du Soleil,

*<http://gaia.esa.int/>

Paramètre	Effet	Limite	Remarques
$\gamma - 1$	effet Shapiro	$2.3 \cdot 10^{-5}$	Sonde Cassini [44]
	déviaton de la lumière	$4 \cdot 10^{-4}$	VLBI [198]
$\beta - 1$	avance du périhélie	$3 \cdot 10^{-3}$	$J_2 = (2.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-7}$ [164]
		$1 \cdot 10^{-5}$	$J_2 = 2.46 \cdot 10^{-7}$ [108]
ξ	effet Nordtvedt	$2.3 \cdot 10^{-4}$	en supposant $\eta_N = 4\beta - \gamma - 3$
	marées terrestres	10^{-3}	gravimétrie
α_1	effets d'orbite	10^{-4}	télémétrie Laser Lune
		$2 \cdot 10^{-4}$	PSR J2317+1439
α_2	précession du spin	$4 \cdot 10^{-7}$	pour le Soleil
α_3	accélération des pulsars	$4 \cdot 10^{-20}$	statistique sur \dot{P}
η_N	effet Nordtvedt	$9 \cdot 10^{-4}$	télémétrie Laser Lune
ζ_1	-	$2 \cdot 10^{-2}$	combinaison de paramètres
ζ_2	accélération de binaires	$4 \cdot 10^{-5}$	PSR 1913+16
ζ_3	troisième loi de Newton	10^{-8}	accélération de la lune
ζ_4	-	$7 \cdot 10^{-3}$	en supposant $6\zeta_4 = 3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3$ [235]

TAB. 1.2 – Limites sur les paramètres PPN [239].

qui est estimé à $(2.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-7}$ par des méthodes d'héliosismologie [164]. Des observations entre 1971 et 1998 ont permis d'affiner la limite sur β , avec $|\beta - 1| < 1 \cdot 10^{-5}$, si on pose $J_2 = 2.46 \cdot 10^{-7}$ [108].

Les tests du principe d'équivalence fort Le principe d'équivalence fort est plus contraignant que le faible. La Relativité Générale semble être la seule théorie métrique le satisfaisant [238]. On peut diviser ce principe en trois sous-principes :

1. Le principe d'équivalence faible est valide pour les objets auto-gravitants et pour les particules tests.
2. Le résultat d'une expérience est indépendant de la vitesse du référentiel local en chute libre non tournant dans lequel elle est effectuée.
3. Le résultat d'une expérience effectuée dans un référentiel local en chute libre non tournant est indépendant de où et quand dans l'univers elle est effectuée.

La différence avec le principe d'équivalence d'Einstein est la prise en compte des objets auto-gravitants (planètes, étoiles) et des expériences impliquant des forces gravitationnelles (expériences de Cavendish, de gravimétrie). Si nous ignorons les forces gravitationnelles locales, le principe d'équivalence fort devient celui d'Einstein.

Nordtvedt [174] a montré que beaucoup de théories métriques violent le principe d'équivalence fort. Les objets massifs tombent alors avec différentes accélérations, dépendant de leur énergie gravitationnelle interne. Pour quantifier cet effet, connu sous le nom d'effet de

Nordtvedt, il est d'usage d'introduire le paramètre η_N . L'accélération d'un corps à symétrie sphérique dans un potentiel gravitationnel U extérieur est alors :

$$\vec{a} = \frac{m_G}{m} \vec{\nabla} U = \left(1 - \eta_N \frac{E_g}{mc^2} \right) \vec{\nabla} U ,$$

où E_g est la valeur absolue de l'énergie gravitationnelle interne du corps. Pour des expériences de laboratoire, le facteur $f = E_g/mc^2$ est bien trop faible pour pouvoir être détecté ($\leq 10^{-27}$). Par contre, ce facteur est beaucoup plus important pour les planètes : $3.6 \cdot 10^{-6}$ pour le Soleil, 10^{-8} pour Jupiter, $f_T = 4.6 \cdot 10^{-10}$ pour la Terre et $f_L = 0.2 \cdot 10^{-10}$ pour la Lune. η_N est nul en Relativité générale, mais pas dans les théories scalaires-tensorielles [238]. Si l'effet de Nordtvedt est présent, alors la Terre tombe avec une accélération différente de la Lune vers le Soleil. L'analyse de données télémétriques Laser Lune donne une limite* $|\eta_N| = (4.4 \pm 4.5) \cdot 10^{-4}$ [242], ce qui correspond à un rapport d'Eötvös $|\eta| = |\eta_N(f_T - f_L)| = (1.9 \pm 2.0) \cdot 10^{-13}$ (voir la figure 1.1). Le projet APOLLO[†], Apache Point Observatory for Lunar Laser ranging Operation, de la NASA et de la NSF, améliorera la précision de la mesure d'environ un ordre de grandeur [243].

Des violations du principe d'équivalence fort peuvent aussi être quantifiées avec les paramètres α_1 , α_2 , α_3 et ξ (Tab. 1.1). Plusieurs effets découleraient de la non nullité de ces paramètres. On note parmi les plus importants : des variations et des anisotropies de la valeur locale de la constante de la gravitation, impliquant des marées terrestres anormales et une variation de la rotation de la Terre ; des contributions anormales à la dynamique des objets du Système Solaire ; une accélération propre des pulsars ; des moments cinétiques anormaux du Soleil ; et une variation de la constante de gravitation avec le temps [238]. Les limites sur les paramètres PPN qui en résultent sont résumées dans le tableau 1.2.

Tests des lois de conservation La non nullité des paramètres ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 et α_3 auraient pour conséquence une violation des lois de conservation du moment cinétique et de la troisième loi de Newton. Une variante de la troisième loi de Newton peut être énoncée ainsi : la masse grave active, m_A , qui détermine le potentiel gravitationnel d'un corps, est égal à la masse grave passive, m_P , qui détermine la réaction d'un corps dans un champ gravitationnel extérieur. Cette égalité garantit, dans la limite newtonienne, l'égalité de l'action et de la réaction et la conservation du moment cinétique. Bartlett et Van Buren [37] ont trouvé une limite sur la violation de cette loi grâce à la structure de la Lune. Celle-ci est composée d'un manteau riche en fer, et pauvre en aluminium, dont le centre de masse est décalé d'environ

*Cela représente un « bon » test seulement si nous sommes sûr qu'une violation du principe d'équivalence faible ne vient pas compenser la violation du principe d'équivalence fort. Le groupe « Eöt-Wash » a fait une balance de torsion avec des corps reproduisant au mieux les compositions de la Terre et de la Lune [31]. Cela renforce la légitimité de la mesure par télémétrie Laser Lune.

[†]<http://physics.ucsd.edu/%7Etmurphy/apollo/>

10 km de celui de la croûte, qui est pauvre en fer, et riche en aluminium. La violation de la troisième loi de Newton impliquerait l'existence d'une force propre, dirigée dans une direction faisant 14° avec la ligne Terre-Lune. Cela aurait pour effet d'accélérer l'orbite lunaire. Grâce à des mesures télémétriques Laser Lune, et à la connaissance des effets de marées du système Terre-Lune, [Bartlett et Van Buren](#) ont déduit que :

$$\left| \frac{(m_A/m_P)_{\text{Al}} - (m_A/m_P)_{\text{Fe}}}{(m_A/m_P)_{\text{Fe}}} \right| < 4 \cdot 10^{-12} .$$

Cette limite implique $\zeta_3 < 10^{-8}$ [\[238\]](#).

Une autre conséquence de la violation du moment cinétique serait une accélération propre du centre de masse d'un système binaire, qui entraînerait une accélération d^2P/dt^2 de tout phénomène périodique dans le système. Les observations du pulsar binaire PSR 1913+16 impliquent la contrainte $|\alpha_3 + \zeta_2| < 4 \cdot 10^{-5}$ [\[237\]](#).

1.1.4 L'entraînement des référentiels inertiels locaux

La notion de référentiel inertiel local sera développée en détail dans le chapitre [2](#). Nous allons voir ici quelques conséquences de l'entraînement des référentiels inertiels locaux, et les mesures qui en ont été faites. Un gyroscope définit, par sa rotation, un axe fixe par rapport à un référentiel inertiel local. Les plans orbitaux des planètes sont comme d'immenses gyroscopes qui ressentent les effets relativistes. La rotation du Soleil « entraîne » l'espace-temps autour de lui, un peu comme une masse que l'on tournerait dans un pot de miel. Cela entraîne une précession des nœuds de l'orbite des planètes et un décalage de leur périhélie. En 1916, [de Sitter](#) [\[88\]](#) calcula la petite correction dans l'avance du périhélie de Mercure due à la rotation du Soleil. En 1918, [Lense et Thirring](#) [\[154\]](#) formalisèrent la description, dans la limite des champs gravitationnels faibles et des petites vitesses, de l'orbite d'une particule test autour d'un corps en rotation. La rotation du corps influe aussi le déroulement du temps autour de lui (voir figure [1.8](#)).

Les satellites LAGEOS L'effet Lense-Thirring sur l'orbite d'un satellite tournant autour de la Terre est extrêmement faible. Il faut, pour le mesurer, connaître sa position en fonction du temps avec une très grande précision. Les satellites LAGEOS et LAGEOS2, qui ont été lancés en 1976 et 1992, sont des petites boules munies de 426 réflecteurs de lumière. Par télémétrie, il est possible de connaître leur position avec une précision de quelques millimètres [\[173\]](#). L'entraînement des nœuds de l'orbite des satellites LAGEOS par l'effet Lense-Thirring (Fig. [1.9](#)) est d'environ 31 millisecondes d'arc par an [\[72, 74\]](#), soit un tour en plus de 40 millions d'années ! Or les principales perturbations de leurs plans orbitaux

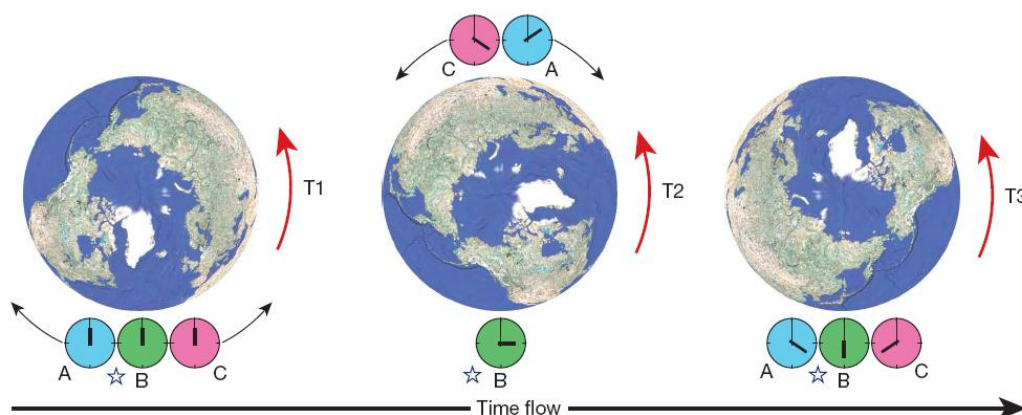


FIG. 1.8 – Supposons que deux horloges, ou deux jumeaux A et C, volent autour d'un corps en rotation. B, un troisième jumeau, les attend au point de départ, qui est fixe par rapport aux étoiles lointaines. Lorsqu'ils se rencontrent de nouveau, le jumeau A, qui voyageait dans la direction opposée à la rotation du corps central, sera plus jeune que B. Le jumeau C, qui voyageait dans le même sens que la rotation du corps central, sera plus vieux que B et que A. La différence d'âge, due à la rotation de la Terre, entre les deux jumeaux volant dans des directions opposées dans le plan équatorial, serait d'environ 10^{-16} s (pour une altitude de 6000 km). Cette différence est noyée dans des effets relativistes d'horloges bien plus grands. L'image est reprise de l'article de revue de I. Ciufolini [73].

sont dues à la forme non sphérique de la Terre. En particulier, l'aplatissement de la Terre provoque une large perturbation dans la position des nœuds de l'orbite.

En mars 2002 sont lancés les deux satellites GRACE*, Gravity Recovery And Climate Experiment, financés par la NASA. Grâce à ces satellites notre connaissance du potentiel gravitationnel terrestre a beaucoup progressé. En 2004, en combinant onze ans de données télémétriques et les modèles de GRACE, il semble que l'effet Lense-Thirring a pu être décelé dans les orbites des satellites LAGEOS avec une précision de l'ordre de 10 % [75, 76]. La plus grande source d'erreur dans l'analyse des données est l'imprécision sur le moment d'ordre 4 de la Terre (voire figure 1.9).

Gravity Probe B (GP-B) L'idée de mesurer l'entraînement d'un gyroscope dû aux effets relativistes a été suggérée en 1959 et 1960 [183, 191, 192]. Après 40 ans de préparation, GP-B† est lancé le 20 avril 2004 en orbite polaire autour de la Terre, pour finir sa mission après 18 mois de fonctionnement. Le satellite a embarqué quatre gyroscopes, et un télescope destiné à déterminer sa position par rapport à une étoile lointaine. Dans cette expérience, l'effet d'entraînement des référentiels est recherché sur la direction des gyroscopes, et non sur l'orbite du satellite : l'effet Lense-Thirring entraîne une précession du gyroscope d'envi-

*<http://www.csr.utexas.edu/grace/>

†<http://einstein.stanford.edu/>

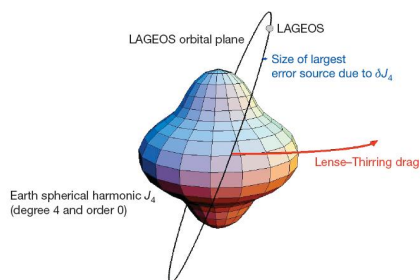


FIG. 1.9 — La précession due à l'effet Lense-Thirring du plan de l'orbite d'un satellite LAGEOS est représenté par la flèche rouge. La déformation de la Terre due à son moment d'ordre 4, J_4 , est exagérée. L'incertitude sur J_4 est la plus grande source d'incertitude dans la mesure de la précession des nœuds de l'orbite de LAGEOS. Elle représente 3 % de l'effet Lense-Thirring. Cette figure est reprise de l'article [73].

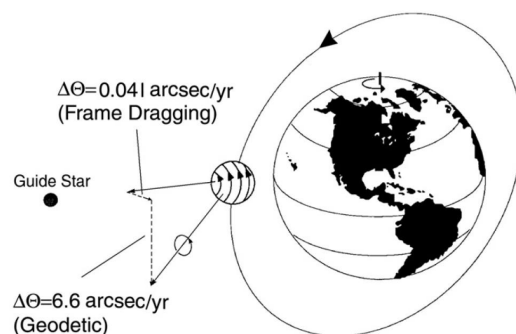


FIG. 1.10 — L'effet Lense-Thirring entraîne une précession des gyroscopes par rapport à un axe contenu dans le plan de l'orbite du satellite. La précession géodésique entraîne une précession par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'orbite.

ron 39 millisecondes d'arc par an, par rapport à un axe contenu dans le plan de l'orbite du satellite. De plus, la précession géodésique entraîne une précession de 6.6 secondes d'arc par an, par rapport à un axe perpendiculaire au plan de l'orbite (voir figure 1.10). La précession géodésique est la combinaison de deux effets : la précession de Thomas, due aux forces non gravitationnelles, et l'effet de de Sitter, d'origine gravitationnelle (Sec. 2.3.2). La direction des gyroscopes est comparée à la direction d'une étoile lointaine, IM Pegasi, dont le mouvement par rapport à des quasars lointains est connu avec une précision d'une fraction de millisecondes d'arc par an, grâce à des observations du VLBI.

Les quatre gyroscopes de GP-B sont des sphères de quartz (rotor) de 1.9 cm de rayon, dont les hétérogénéités relatives de densité sont inférieures à quelques 10^{-6} , tournant à 4000 tours par minute. Elles sont refroidies à 2 K, température à laquelle la fine couche de Nobium qui les recouvre est supraconductrice. Elles génèrent alors un champ magnétique alignés avec leur axe de rotation. Une variation de la direction de l'axe de rotation d'un gyroscope, par rapport à la direction de l'étoile lointaine, entraîne une variation du flux du champ magnétique, qui induit un courant électrique dans un circuit entourant le gyroscope. Le 14 avril 2007 furent présentés les premiers résultats de la mission [21]. La précession géodésique a été mesurée avec une précision de l'ordre de 1.5 %, bien inférieure à ce qui était prévu. En effet, une dérive non modélisée, de l'ordre de 100 millisecondes d'arc par an, qui correspond à 2.5 fois l'effet Lense-Thirring, est apparue dans les données. Cependant, en modélisant ces effets systématiques *a posteriori*, l'équipe pense pouvoir améliorer les résultats, pour obtenir

une précision sur l'effet Lense-Thirring d'environ 5 %*. Les résultats finaux devraient être communiqués en mai 2008.

Hyper Hyper[†] est un projet de satellite spatial, embarquant des gyromètres atomiques à son bord, et un télescope. Le principe est le suivant : mesurer la différence de phase induite par la rotation autour de l'axe de precession, due à l'effet Lense-Thirring et à la précession géodésique. Dans le chapitre 4 nous calculerons de manière rigoureuse cette différence de phase.

La précession géodésique a aussi été mesurée sur l'orbite de la Lune par télémétrie laser [240–242], et détectée sur les pulsars binaires [201, 231].

1.2 Les ondes gravitationnelles

En astronomie, les Ondes Gravitationnelles (OGs) formeront un vecteur d'information complémentaire des ondes électromagnétiques, si nous parvenons à les détecter directement. Les sources intenses d'OGs n'émettent pas ou peu dans le domaine électromagnétique et réciproquement. En effet, les OGs n'interagissent que très faiblement avec la matière : les milieux opaques aux rayonnements électromagnétiques peuvent être « transparents » aux OGs. C'est aussi pourquoi elles sont extrêmement difficiles à détecter directement. Nous n'avons que des preuves indirectes de leur existence : d'une part, il s'agit d'une prédiction de la Relativité Générale, et nous avons vu comment cette théorie a été testée, toujours avec succès ; d'autre part, le chronométrage du pulsar binaire PSR 1913+16 a permis de mesurer sa perte d'énergie, en accord avec la prédiction de perte d'énergie par émission d'OGs (avec une précision relative de $3.4 \cdot 10^{-3}$ [232]).

Les sources potentielles d'OGs sont nombreuses. Pour une revue exhaustive on peut lire l'article de revue de Cutler et Thorne [83]. Les détecteurs interférométriques d'OGs, bien que n'ayant pas encore détecté d'OGs, commencent à donner des résultats scientifiques intéressants. Nous détaillerons quelques sources potentielles d'OGs au travers des résultats les plus récents. Commençons par examiner quelques propriétés et ordres de grandeur associés aux ondes gravitationnelles.

1.2.1 Propriétés et ordres de grandeur

Une propriété importante du rayonnement gravitationnel est sa cohérence de phase [109]. Elle implique que la perturbation de la métrique de l'espace-temps, qui varie en $1/r$, peut être observée directement (grâce aux détecteurs interférométriques). Ainsi, doubler la sensibilité

*<http://einstein.stanford.edu/> (Mission update : december 2007).

†<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=46>

du détecteur revient à doubler la distance à laquelle une source peut être détectée, et multiplier par 8 le volume d'univers dans lequel les sources sont observables. À grande distance de la source, la perturbation de la métrique $h_{\alpha\beta} \ll 1$, et la métrique s'écrit $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, où $\eta_{\alpha\beta}$ est la métrique de Minkowski (Sec. 2.3). Dans les coordonnées d'Einstein (Sec. 2.3.3), la perturbation est telle que $h_{00}^E = h_{0i}^E = 0$, et h_{ij}^E est donné par la formule du quadrupôle :

$$h_{ij}^E(\vec{r}, t) = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} P_{ij}{}^{kl} \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) + O \left(\frac{1}{r^2} \right) , \quad (1.2)$$

où \mathbf{P} est un opérateur de projection, r est la distance par rapport à la source, et Q_{kl} est le moment quadrupolaire de la distribution de masse $\rho(\vec{x}, t)$:

$$Q_{kl}(t) = \int \rho(\vec{x}, t) \left(x_k x_l - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{kl} \right) d^3x .$$

La question de savoir si les OGs transportent de l'énergie et de l'impulsion peut être discutée. En effet, il n'existe pas de tenseur énergie-impulsion pour le champ de gravitation ; il est donc dénué de sens de parler d'une localisation déterminée de l'énergie du champ gravitationnel dans l'espace [152, Chap. 96]. Cependant, dans le cadre d'une théorie perturbative post-minkowskienne, on peut définir le tenseur d'énergie-impulsion d'Isaacson, qui détermine l'énergie-impulsion contenue dans une région de taille comparable à la longueur d'onde gravitationnelle [169, Chap. 35]. On obtient alors un « flux » d'énergie rayonné :

$$F = \frac{c^3}{16\pi G} \left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right\rangle ,$$

où $h_+ = h_{11}^E = -h_{22}^E$ et $h_\times = h_{12}^E = h_{21}^E$ sont deux composantes indépendantes, et les crochets indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'onde. Pour une onde monochromatique d'amplitude h^E et de fréquence f :

$$F = \frac{\pi c^3}{4G} f^2 (h^E)^2 \quad (1.3)$$

Certains détecteurs, comme les masses résonantes, ont pour principe d'absorber le flux d'énergie de l'OG. Leur sensibilité est alors proportionnelle à $(h^E)^2$ (et donc à $1/r^2$). Ils ne présentent pas le bénéfice dont nous parlions plus haut lorsque l'on mesure directement h^E . C'est aussi le cas de la cavité à onde de matière résonante que nous étudierons dans le chapitre 6. Numériquement, nous obtenons

$$F = 0.3 \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left(\frac{h^E}{10^{-21}} \right)^2 \text{ W.m}^{-2} .$$

Une OG, même d'amplitude très faible, transporte une quantité appréciable d'énergie.

Pour comparaison, le flux d'énergie solaire arrivant sur l'atmosphère est de 1367 W.m^{-2} (en incidence perpendiculaire).

En intégrant le tenseur d'énergie-impulsion de l'OG sur une sphère entourant la source, et en utilisant la formule du quadrupôle (1.2), nous obtenons la luminosité gravitationnelle de la source, ie. l'énergie rayonnée par unité de temps :

$$L = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle .$$

Soit M la masse de la source, R son extension spatiale, et s un facteur d'asymétrie, alors la norme du moment quadrupolaire est de l'ordre de $Q \sim sMR^2$. On peut alors écrire $\ddot{Q} \sim s\omega^3 MR^2$, où ω est l'inverse du temps caractéristique d'évolution de la source. Nous introduisons $v = \omega R$, une vitesse caractéristique du mouvement de la source, et le facteur de relativité $\Xi \sim R_s/R$, où $R_s = 2GM/c^2$ est le rayon de Schwarzschild de la source. Nous obtenons alors

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \Xi^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6 .$$

Un grand facteur de relativité Ξ caractérise les objets compacts, comme les trous noirs ($\Xi = 1$) et les étoiles à neutrons ($\Xi = 0.2 - 0.4$). Pour des corps avec des vitesses relativistes ($v \sim 1$) et très asymétrique ($s \sim 1$) la puissance rayonnée est très grande : $L \sim c^5/G = 3.6 \cdot 10^{52} \text{ W}$, soit environ 10^{26} fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique !

Soit E_{OG} l'énergie rayonnée sous forme d'OGs, alors $E_{OG} = 4\pi r^2 F \tau$, où τ est le temps que dure l'émission. Pour une onde monochromatique, d'après la relation (1.3) :

$$h^E \sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{GM}{c} \right)^{1/2} \frac{\eta^{1/2}}{r f \tau^{1/2}} ,$$

où $\eta = E_{OG}/Mc^2$ est l'efficacité du processus d'émission gravitationnelle. Numériquement :

$$h^E \sim 2 \cdot 10^{-19} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \left(\frac{1 \text{ ms}}{\tau} \right)^{1/2} \eta^{1/2} ,$$

où M_\odot est la masse du Soleil. Les valeurs numériques choisies sont caractéristiques d'un processus mettant en jeu un trou noir stellaire ou une étoile à neutrons. Ainsi, même si toute l'énergie de masse est rayonnée sous forme d'OGs ($\eta = 1$), l'amplitude de la déformation h^E est inférieure à 10^{-19} pour une source extra-galactique.

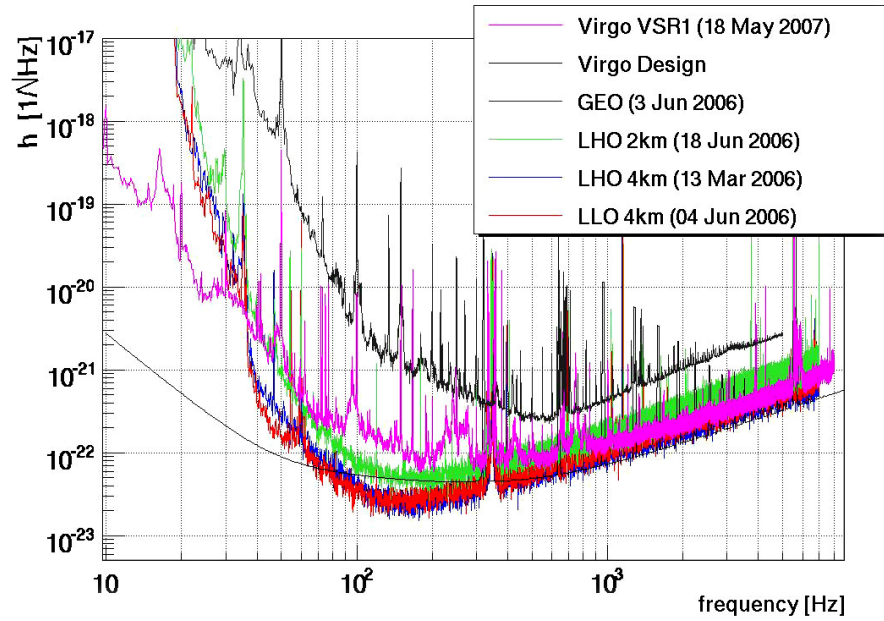


FIG. 1.11 – Sensibilité des cinq grands interféromètres en fonction de la fréquence. Elle est exprimée en unité de h^E (amplitude de l'OG) par $\sqrt{\text{Hz}}$.

1.2.2 Une nouvelle fenêtre pour l'astronomie

LIGO*, Laser Interferometer Gravitational wave Observatory, est la réunion de trois interféromètres de Michelson-Morley géants, se trouvant sur deux sites aux États-Unis. Sur le site de Hanford (LHO), près de Washington, un interféromètre de 4 km de long et un de 2 km se partagent la même enceinte à vide ; le troisième interféromètre, de 4 km de long, est sur le site de Livingston (LLO) en Louisiane. Le LSC (Ligo Scientific Collaboration) est la collaboration scientifique internationale autour de ces trois interféromètres. Elle interagit avec les communautés réunies autour d'autres interféromètres comme GEO600[†] (Anglo-Allemand), Virgo[‡] (Franco-Italien), TAMA300[§] (Japon), ou bien autour des détecteurs à masse résonante.

La construction d'un interféromètre assez sensible pour détecter une OG représente bien sûr un grand défi technologique, et la construction de LIGO et Virgo a pris plus de dix ans ! Actuellement, LIGO a complété 4 périodes d'acquisition de données, et va achever sa cinquième période, la plus longue. Dans le tableau 1.3 nous indiquons les durées et les dates de ces périodes. Sur la figure 1.11 sont tracées les sensibilités des cinq plus grands

*<http://www.ligo.caltech.edu/>

[†]<http://geo600.aei.mpg.de/>

[‡]<http://www.virgo.infn.it/>

[§]<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>

Nom	Dates	Durée (jours)
S1	8/2002 - 9/2002	17
S2	2/2003 - 4/2003	59
S3	11/2003 - 1/2004	70
S4	2/2005 - 3/2005	30
S5	11/2005 - Fin 2007	~ 700

TAB. 1.3 – Périodes d’acquisition de données des interféromètres LIGO.

interféromètres en activité. Elles sont exprimées en unité de h^E (amplitude de l’OG) par $\sqrt{\text{Hz}}$.

Les binaires coalescentes Les systèmes binaires d’objets compacts sont les sources d’OGs les mieux modélisées. La perte d’énergie du système par rayonnement gravitationnel rapproche lentement les deux objets l’un de l’autre, dans un mouvement en spirale descendant vers le centre de masse, jusqu’à la coalescence. Lorsque deux étoiles à neutrons sont séparées de 200 km, la période orbitale est 0.02 s, la fréquence d’émission gravitationnelle 100 Hz et il reste environ 2 secondes avant la coalescence, soit environ 200 orbites. La forme des ondes émises est bien connue*, et il est plus facile de trouver un signal lorsqu’on sait à quoi il ressemble. Cinq étoiles à neutrons binaires sont connues [61, 91, 104, 202, 232], mais elles ne fusionneront pas avant 10^8 à 10^9 ans. Le nombre d’événements attendus avec les détecteurs actuels est inférieur à un par an. L’analyse des données S3 et S4 de LIGO a permis de fixer des limites sur le nombre d’événements de ce type pour différents systèmes binaires [7] : les trous noirs primordiaux binaires, dont les masses se situent entre 0.3 et $1 M_\odot$, les étoiles à neutrons binaires, avec des masses comprises entre 1 et $3 M_\odot$, et les trous noirs binaires, de masses comprises entre 3 et 40 (pour S3) ou 80 (pour S4) masses solaires. Les résultats sont indiqués sur la figure 1.12.

L’analyse des données S5 devrait améliorer ces limites : pour la recherche d’étoiles à neutrons binaires, 200 galaxies équivalentes à la Voie Lactée seront à portée du détecteur, et pour les trous noirs binaires, environ 1000 galaxies seront à portée.

Les sources périodiques Une étoile à neutrons émet des OGs si elle possède un écart à la symétrie axiale dans sa distribution de masse. L’amplitude de l’OG est alors :

$$h_0 = 4.2 \cdot 10^{-24} \left(\frac{\text{ms}}{P} \right)^2 \left(\frac{\text{kpc}}{r} \right)^2 \left(\frac{I}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right)^2 ,$$

*La phase spiralante se modélise dans le formalisme post-newtonien. À un certain stade, après la dernière orbite stable, la binaire atteint un point d’instabilité. L’évolution est alors très rapide et on doit faire appel à des méthodes numériques.

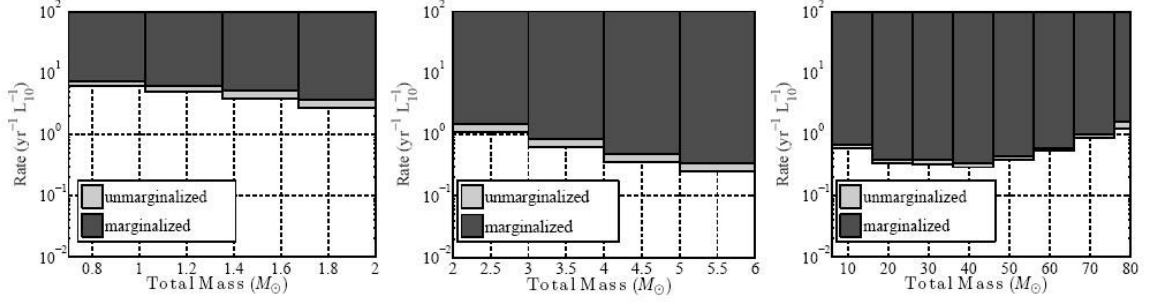


FIG. 1.12 — Limites sur le taux d'événements de coalescence de binaires compactes [7] : trous noirs primordiaux binaires (gauche), étoiles à neutrons binaires (milieu), trous noirs binaires de masses stellaires (droite). Le taux est exprimé en nombre d'événements par an et par L_{10} , L_{10} étant égal à 10^{10} fois la luminosité solaire dans le bleu. La Voie Lactée représente $1.6 \cdot L_{10}$.

où P est la période de rotation de l'étoile, r sa distance, I son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et ϵ mesure sa déviation relative à la symétrie axiale. Différents mécanismes conduisent à $\epsilon \neq 0$ pour les étoiles à neutrons : irrégularités de la croûte solide, déformations due au champ magnétique [82], accrétion de matière dans un système binaire [45, 220]. Pour une revue voir les articles [46, 137]. Les jeunes pulsars*, comme celui du Crabe (PSR J0534+2200), sont de très bons candidats, car des irrégularités dans leur rayonnement électromagnétique semblent indiquer des asymétries.

Les données S3, S4, et de GEO600 ont été analysées à la recherche du signal de 78 pulsars connus [9]. La figure 1.13 montre les limites supérieures sur h_0 pour ces 78 pulsars, pour un niveau de confiance de 95 %. De plus, on observe une augmentation de la période de rotation des pulsars, qui peut être liée à des mécanismes complexes dans sa magnétosphère, ou bien à la perte d'énergie par rayonnement gravitationnel. En supposant que la perte de vitesse est entièrement due à l'émission d'OGs, on déduit une limite supérieure sur h_0 , appelée la limite « spin-down ». Lorsque la limite observée atteint la limite « spin-down », alors l'observation commence à prendre du sens. La limite observée du pulsar du Crabe (vers 60 Hz) n'est qu'à un facteur 2.2 de la limite « spin-down ». L'analyse des données S5, pour quelques pulsars, permettront de mettre des limites de l'ordre de 10^{-25} sur h_0 , et de 10^{-7} sur ϵ .

Les sursauts d'OGs La forme des sursauts d'OGs est mal connue. D'une durée $\ll 1$ s, ils pourraient être émis lors de l'effondrement gravitationnel d'une étoile (supernovae) [117–119], ou bien lors de la phase de fusion d'une binaire compact. La forme de la déformation $h(t)$ n'est pas modélisée *a priori*. On définit

*Une étoile à neutrons possède un intense champ magnétique, assez puissant pour accélérer les particules chargées de son atmosphère. Elles émettent alors un rayonnement radio le long de l'axe magnétique. Celui-ci n'est pas aligné avec l'axe de rotation, et l'étoile à neutrons émet en radio comme un phare. Lorsque le rayonnement radio atteint la Terre, on le détecte avec un radiotélescope. On l'appelle alors un pulsar. Le nombre de détection dans le temps nous donne la vitesse de rotation du pulsar.

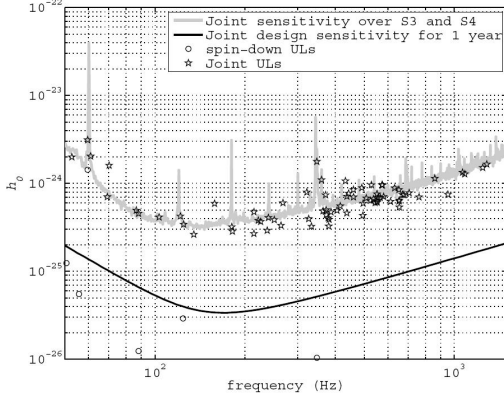


FIG. 1.13 – Limites supérieures (ULs) sur l'émission d'OGs de 78 pulsars connus, d'après l'analyse des données S3, S4, et de GEO600. La courbe noire représente la sensibilité attendue grâce aux données S5 [9].

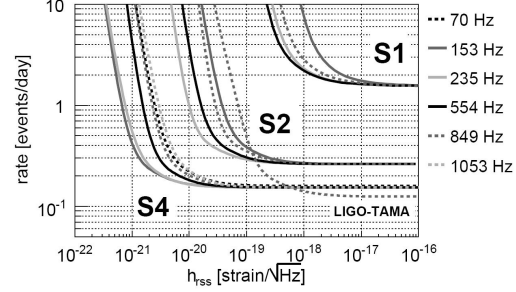


FIG. 1.14 – Limites sur les amplitudes h_{rss} de sursauts d'OGs, associés à des signaux anormalement élevés [4].

$$h_{\text{rss}} = \left[\int h(t)^2 dt \right]^{1/2}.$$

Pour déterminer la sensibilité du détecteur, on utilise généralement une forme sinuso-gaussienne :

$$h(t) = h_0 \sin(2\pi f_{\text{sin}}(t - t_0)) e^{-\frac{(t - t_0)^2}{(2/f_{\text{sin}})^2}}, \quad (1.4)$$

où t_0 et h_0 sont respectivement le temps et l'amplitude du pic du signal, et f_{sin} sa fréquence centrale. L'analyse des données de LIGO et de TAMA ont permis de mettre une limite sur le taux d'événements de ce type, par rapport à leur amplitude h_{rss} [4]. Les résultats sont résumés sur la figure 1.14. Les fréquences ont été choisies pour des signaux anormalement élevés dans les données. Supposons qu'une source isotropique, située à environ 15 Mpc, émet des OGs de la forme (1.4) à une fréquence d'environ 150 Hz, alors l'efficacité de la détection est d'environ 50 % pour une énergie rayonnée de $0.2 M_{\odot} c^2$. Pour les données S5, toutes choses égales par ailleurs, la limite descendra à $0.05 M_{\odot} c^2$.

Les sursauts gammas* de longue durée (> 2 s) sont associés à des effondrements gravitationnels d'étoiles, alors que ceux de courte durée sont plutôt associés à la fusion d'étoiles à neutrons (ou bien d'une étoile à neutron avec un trou noir) [120]. Dans les deux cas, les sursauts gammas peuvent être accompagnés de sursauts d'OGs. Une analyse des données S2, S3 et S4 a été faite, pour rechercher des sursauts d'OGs associés à la détection de 39

*Les sursauts gammas sont d'intenses bouffées de rayonnement gamma observées sur toute la voûte céleste. Le satellite Swift les observe depuis novembre 2004.

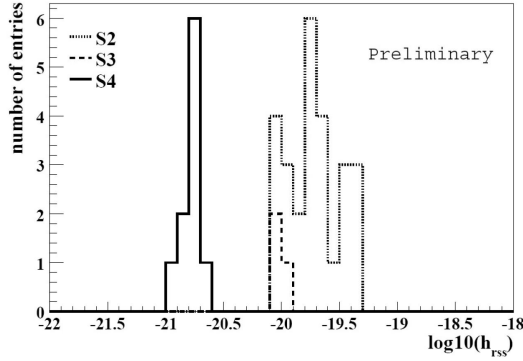


FIG. 1.15 — Limites supérieures sur les amplitudes h_{rss} de sursauts d'OGs associés à 39 sursauts gammas observés [6].

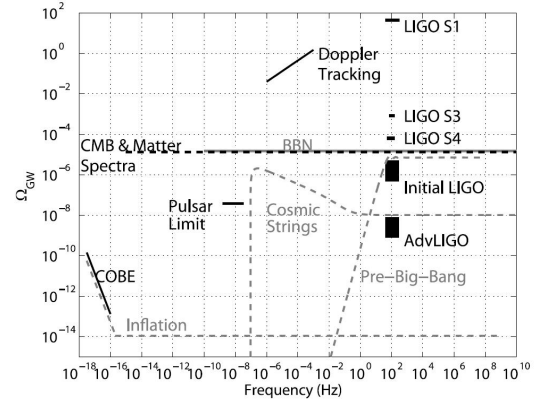


FIG. 1.16 — Contraintes expérimentales sur un rayonnement de fond stochastique [8]. Les courbes de quelques scénarios théoriques sont tracées (modèles inflationnaire, cordes cosmiques et pré Big-Bang), ainsi que d'autres limites, comme celles venant de la nucléosynthèse primordiale (BBN) ou bien du rayonnement fossile électromagnétique (CMB).

sursauts gammas [6]. La figure 1.15 donne les résultats préliminaires de cette étude. La forme de l'OG est supposée être sinus-gaussienne, avec une polarisation circulaire à 250 Hz. Pour une amplitude de $h_{\text{rss}} = 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$, LIGO est sensible à une émission énergétique de $0.5 M_{\odot} c^2$ à une distance d'environ 20 Mpc.

Le 27 décembre 2004, la source gamma 1806-20 a émis un rayonnement intense, qui a duré environ six minutes. Certains modèles prédisent que ce type d'événements est accompagné d'une émission d'OGs. Une analyse des données LIGO a mis une limite sur l'énergie émise, en supposant une émission isotropique, à $4.3 \cdot 10^{-8} M_{\odot} c^2$, ce qui est comparable à l'énergie émise dans le domaine électromagnétique [5].

Les sources stochastiques La superposition des OGs émises par toutes les sources déjà mentionnées créent un rayonnement de fond stochastique. À celui-ci s'ajoute un rayonnement d'origine cosmologique, produit aux premiers instants après le Big-Bang, similaire au rayonnement fossile à 3 K dans le domaine électromagnétique. Pour une revue on peut lire les articles [17, 60, 158]. Ses origines sont aussi diverses que spéculatoires : fluctuations quantiques primordiales, cordes cosmiques, formations de domaines dans les transitions de phase, condensation de branes, ... Leur principal intérêt est de s'étendre le plus souvent sur toutes les plages de fréquences ; leur principal inconvénient est que leur amplitude est souvent inconnue. Elles sont caractérisées par leur densité d'énergie par unité de fréquence, $d\rho_{\text{gw}}/df$. On introduit alors la fonction

$$\Omega_{\text{gw}}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{gw}}}{d \ln f}, \quad (1.5)$$

où $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ est la densité critique de l'univers, et H_0 la valeur actuelle de la constante de Hubble. L'analyse des données S4 donne une limite dans la bande de fréquence 50-150 Hz : $\Omega_{\text{gw}} < 6.5 \cdot 10^{-5}$ [8], qui n'est pas encore très compétitive (voir figure 1.16). Il faudra attendre les améliorations de LIGO pour pouvoir placer des limites intéressantes, de l'ordre de 10^{-10} .

Virgo entre dans la course La première longue acquisition de données de Virgo, 4 mois de fonctionnement, a terminé le premier octobre [98]. Il s'est bien déroulé, avec un temps de service d'environ 81 %, et un horizon* allant de 3.5 à 4.5 Mpc. Cette période coïncide avec la période S5 de LIGO. La durée pendant laquelle les trois plus grands interféromètres (LLO, LHO et Virgo) ont fonctionné de concert est d'environ 80 jours. Pour l'instant aucune analyse conjointe n'a été faite mais des projets de collaboration sont en cours [40–42]. Deux analyses sont déjà parues sur les données de Virgo : la recherche d'un sursaut d'OGs associé au sursaut gamma GRB 050915a en 2005 [14], et la recherche de sources périodiques d'OGs entre 50 Hz and 1050 Hz [14]. Les analyses de données conjointes seront bien sûr beaucoup plus fiables.

Amélioration des antennes terrestres LIGO et Virgo sont amenés à considérablement évoluer dans les prochaines années. Des améliorations techniques leur permettront d'augmenter de façon significative leur sensibilité. Par exemple, le projet Advanced LIGO† vise à augmenter d'un ordre de grandeur la sensibilité de LIGO, et donc multiplier par mille le nombre de sources à portée du détecteur ! Quelques heures d'observations suffiront pour être aussi sensible que LIGO pendant une année. Le projet Advanced Virgo‡ vise de façon similaire à améliorer Virgo.

Les détecteurs à masses résonantes Ce type de détecteurs a aussi son rôle à jouer dans la nouvelle astronomie. Ils fonctionnent d'une manière différente : l'OG induit des oscillations mécaniques dans un matériel à grand facteur de qualité ($> 10^6$), qui sont ensuite transformées en signal électrique par des transducteurs, puis amplifiées. Leur bande-passante, de l'ordre de 10 à 100 Hz, est très petite par rapport aux détecteurs interférométriques. Les sensibilités sont comprises entre 10^{-20} et 10^{-21} Hz $^{-1/2}$. Le bruit thermique est un des facteurs limitants. Pour une revue on peut lire les articles [102, 103]. Il y a actuellement cinq détecteurs

*L'horizon est la distance de détection de la coalescence de deux étoiles à neutrons.

†<http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/scripts/summary.shtml>

‡<http://www.cascina.virgo.infn.it/advirgo/>

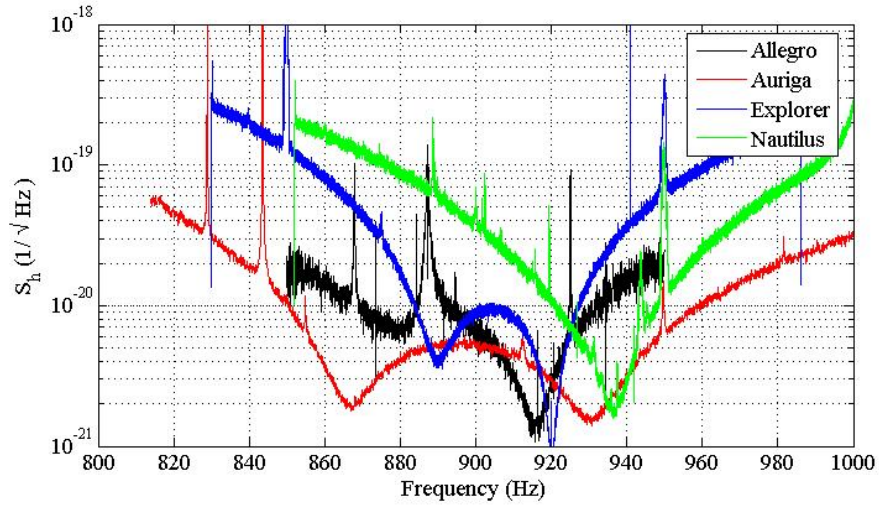


FIG. 1.17 — Sensibilités de quatre détecteurs à masses résonantes. La bande-passante est beaucoup plus petite que celle des détecteurs interférométriques.

en fonctionnement : ALLEGRO^{*}, AURIGA[†], NIOBE[‡], EXPLORER et NAUTILUS[§]. Ces détecteurs fonctionnent depuis un moment en collaboration[¶], et ont donné des limites intéressantes sur les OGs [18, 30, 170, 233]. De plus, des études conjointes avec Virgo [13, 179] et LIGO [3] ont commencé.

Les détecteurs spatiaux Sur Terre les détecteurs interférométriques sont limités à basse fréquence par les variations locales de gravité et les bruits sismiques : mouvements du sol (tremblements de terre, vibrations), masses mouvantes (personnes qui se déplacent, arbres qui bougent), environnement climatique (vent, pluie). Un moyen radical de se débarrasser de ces bruits est d'aller dans l'espace. Les avantages sont alors nombreux : élimination des bruits sismiques et gradients de gravité, vide presque parfait pour les bras de l'interféromètre, place disponible beaucoup plus grande. Le fait d'allonger les bras permet d'être sensible à des OGs de fréquence beaucoup plus basse^{||}. Le projet LISA^{**}, soutenu par l'ESA, est un

^{*}<http://sam.phys.lsu.edu/>

[†]<http://www.auriga.lnl.infn.it/>

[‡]<http://www.gravity.pd.uwa.edu.au/>

[§]<http://www.lnf.infn.it/esperimenti/rog/>

[¶]IGEC, International Gravitational Event Collaboration (<http://auriga9.lnl.infn.it/IGEC2/>)

^{||}Nous verrons dans le chapitre 5 qu'un paramètre important pour déterminer la réponse en fréquence de l'interféromètre est le temps de parcours de la particule dans l'interféromètre. Comme la lumière a une vitesse fixée, pour modifier le temps de parcours il faut modifier la longueur des bras (ou bien mettre une cavité). Avec des atomes (interféromètres atomiques), on aurait l'avantage de pouvoir choisir la vitesse de la particule.

^{**}<http://lisa.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=27>

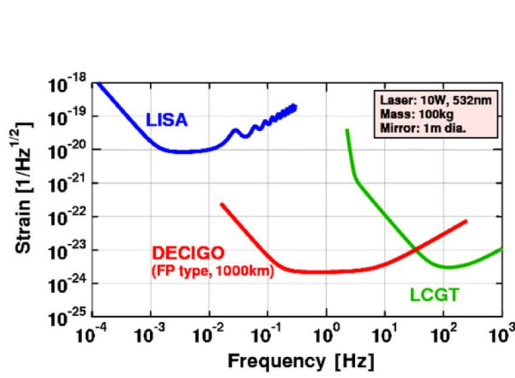


FIG. 1.18 – Sensibilités des projets d'interféromètres spatiaux LISA et DECIGO. La sensibilité attendue du LCGT (projet japonais de détecteur terrestre) est mis pour comparaison [140].

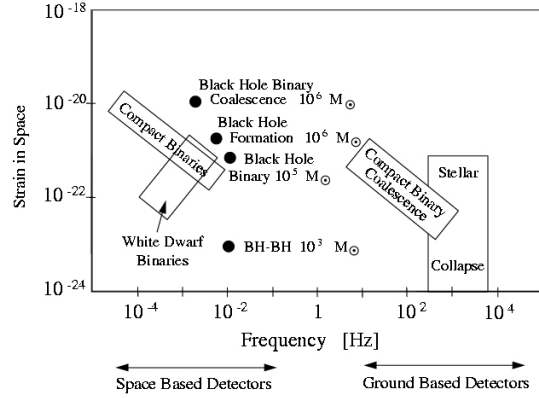


FIG. 1.19 – Amplitudes de quelques sources d'OGs en fonction de leur fréquence. Les sources à basses fréquence (< 1 Hz) seront des cibles privilégiées pour LISA, alors que les sources à haute fréquence seront détectées par les interféromètres au sol.

interféromètre spatial composé de trois satellites éloignés de cinq millions de kilomètres. Sa plage de fréquence ira d'environ 10^{-4} Hz à 1 Hz (Fig. 1.18). Pour une revue détaillée on peut lire les articles [26, 84, 101].

Les naines blanches binaires assez proches devraient être facilement détectables par LISA ; on s'attend même à en découvrir de nouvelles, non visibles dans le domaine électromagnétique. Le reste des binaires compacts constituent un fond stochastique, qui devrait être détectable. Une source importante pour LISA sera les événements mettant en jeu des trous noirs supermassifs : coalescences de trous noirs supermassifs [134], capture d'objets compacts par des trous noirs supermassifs [20]. Le détecteur permettra aussi de placer des limites intéressantes sur le fond d'OGs d'origine cosmologique, en atteignant une limite sur Ω_{gw} (Éq. (1.5)) d'environ 10^{-11} . L'amplitude de quelques sources, comparées à leur fréquence, sont résumées sur la figure 1.19. Enfin, LISA pourrait avoir des applications secondaires intéressantes, comme la détection d'astéroïdes géocroiseurs [226].

DECIGO (DECi-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory) est un projet d'interféromètre spatial japonais [140]. Sa fréquence d'observation devrait être comprise entre 1 mHz et 100 Hz, créant un pont entre LISA et les détecteurs terrestres (voir figure 1.18).

PREMIÈRE PARTIE

**OUTILS THÉORIQUES POUR
L'EXPÉRIMENTATION**

LES RÉFÉRENTIELS LOCAUX

SOMMAIRE

2.1	LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE D'EINSTEIN	39
2.1.1	Un peu de géométrie	39
2.1.2	Le référentiel inertiel local	41
2.2	LE RÉFÉRENTIEL DE FERMI	45
2.2.1	Le référentiel propre	45
2.2.2	Une extension du référentiel propre	50
2.2.3	Les coordonnées normales de Fermi	55
2.3	L'APPROXIMATION LINÉAIRE	57
2.3.1	Changements de coordonnées	57
2.3.2	La métrique post-newtonienne paramétrée (PPN)	60
2.3.3	Les ondes gravitationnelles	64

LA relativité générale a des conséquences contre-intuitives qui font que c'est une théorie à la fois compliquée à comprendre, mais aussi à utiliser. Einstein lui-même relate ses mésaventures* :

« Je me rendis bientôt compte qu'avec la conception des transformations non linéaires requise par le principe d'équivalence, c'en devait être fini de l'interprétation physique directe des coordonnées ; autrement dit : on ne pouvait plus exiger que les différences entre coordonnées représentent les résultats immédiats de mesures effectuées à l'aide de règles ou d'horloges. Cette constatation me tracassa beaucoup, car je restai longtemps incapable de comprendre ce que, tout compte fait, les coordonnées doivent alors représenter en physique. »

*Conférence prononcée le 20 juin 1933 à Glasgow.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord comment les référentiels inertiels permettent de faire le lien entre la relativité restreinte et la relativité générale. Puis, nous nous inspirons de l'article fondateur de [Fermi \[105\]](#), traduit dans l'annexe [C](#), pour définir un référentiel bien adapté à l'expérience : le référentiel de Fermi. Nous pouvons le voir aussi comme une extension du référentiel propre de [Misner *et al.* \[169\]](#). Nous ferons le lien avec les coordonnées normales de Fermi [\[160\]](#), qui sont une spécialisation des coordonnées de Fermi. Enfin nous décrirons le référentiel de Fermi dans le cas d'un champ gravitationnel faible, et tout particulièrement pour une métrique PPN et une métrique d'ondes gravitationnelles.

2.1 Le principe d'équivalence d'Einstein

2.1.1 Un peu de géométrie

Nous connaissons l'expérience de pensée qui consiste à mettre un (infortuné) physicien dans un ascenseur en chute libre. Elle illustre l'équivalence entre un champ gravitationnel et une accélération, pourvu que l'ascenseur soit assez petit. Cette expérience de pensée découle directement du principe d'équivalence newtonien, qui postule l'égalité entre la masse grave et la masse inerte, et a conduit Einstein en 1907 à énoncer son propre principe d'équivalence [99], qui est à la base de la construction de la relativité générale (voir section 1.1.1).

Il convient maintenant de traduire ce principe en langage mathématique. Pour aller de la relativité restreinte à la relativité générale, il faut abandonner la géométrie plate (pseudo-euclidienne) et adopter une géométrie courbe (pseudo-riemanienne) ; mais comment formuler les lois de la physique dans cette nouvelle géométrie courbe ? Le principe d'équivalence va nous servir de guide, ou bien, pour reprendre une formule de Misner *et al.* [169, p. 207], de « véhicule » entre les deux théories.

La notion de référentiel est essentielle dans l'énoncé du principe d'équivalence. C'est un concept important que nous préciserons tout au long de ce chapitre. Commençons par nous familiariser avec le vocabulaire des géométries courbes, sans entrer dans les détails* (les notions introduites sont illustrées sur la figure 2.1). L'espace-temps de la relativité générale est représenté par une variété pseudo-riemanienne \mathcal{M} de dimension quatre, qui est une variété différentiable munie d'une métrique g . Un système de coordonnées x est une application[†] qui à un point P de la variété - ou événement - fait correspondre quatre nombre réels $(x^\alpha)_P$, appelés coordonnées du point P . Généralement, un système de coordonnées ne peut pas être défini sur toute la variété, mais seulement sur un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$. En chaque point P de la variété est associé un espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{M})$, nommé espace tangent, de dimension quatre. Les éléments de l'espace tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{M})$ sont les dérivations, qui font correspondre à une fonction scalaire définie sur la variété un nombre réel, qui est la valeur de la dérivation au point P . Un repère sur \mathcal{U} est la donnée, en chaque point $P \in \mathcal{U}$, d'une base de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{M})$. Le repère naturel associé au système de coordonnées x , au point $P \in \mathcal{U}$, est formé des vecteurs

$$e_\alpha = \{\partial_\alpha\}_P = \{\partial/\partial x^\alpha\}_P .$$

La métrique g est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de $\mathcal{T}_P(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_P(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est entièrement déterminée par son action sur une base de l'espace tangent. Si on la

*Pour approfondir, on peut se reporter aux cours de Gourgoulhon [124] et de Coquereaux [80].

[†]Cette application, définie sur un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$, est supposée bijective et bicontinue.

représente dans le repère naturel associé au système de coordonnées \boldsymbol{x} , on obtient les seize composantes d'une matrice carrée de dimension quatre :

$$g_{\alpha\beta}(P) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) .$$

Cette matrice est inversible car la métrique est non dégénérée. Elle est symétrique, donc le nombre de ses composantes se réduit à dix. De plus, comme elle est à valeurs réelles, elle est diagonalisable. Il existe donc un repère $(\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}=0..3}$ dans lequel la métrique est représentée par une matrice diagonale :

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(P) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\beta}}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} . \quad (2.1)$$

Un tel repère, au point $P \in \mathcal{U}$, est une base orthonormale de $\mathcal{T}_P(\mathcal{M})$, ou tétrade. Le nombre de valeurs positives et négatives sur la diagonale dans cette représentation est caractéristique de la métrique introduite : c'est sa signature. La signature de la métrique de l'espace-temps est donc $(1, 3)$, car il y a une valeur positive pour trois négatives. On l'écrit aussi $(+, -, -, -)$. Comme en relativité restreinte, la signature $(-, +, +, +)$ est équivalente.

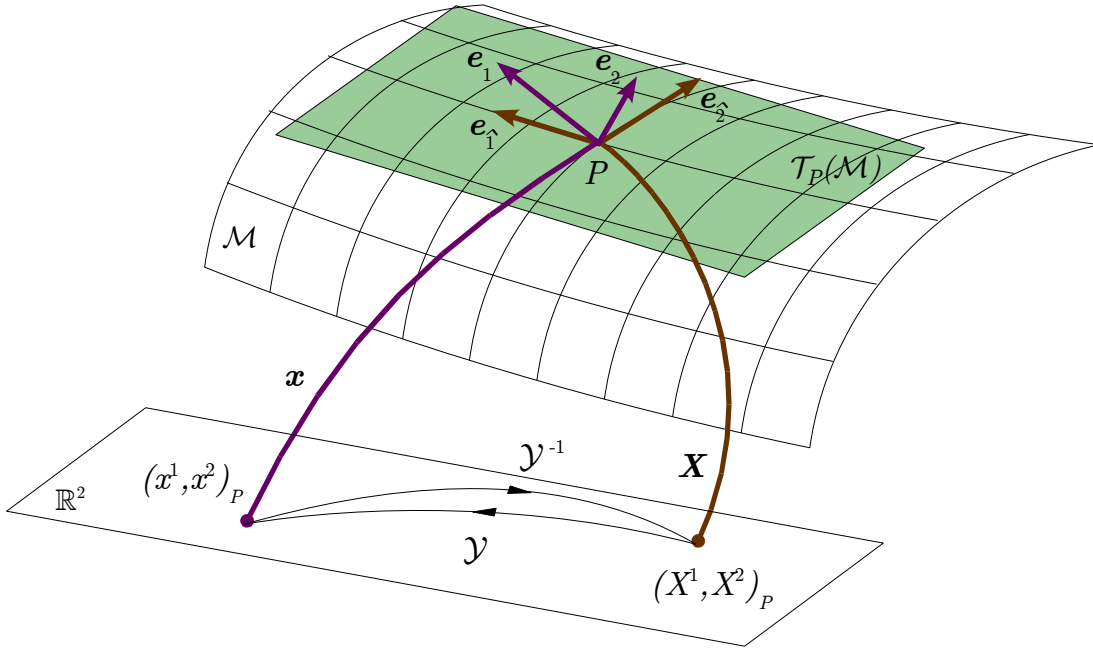


FIG. 2.1 – Illustration en deux dimensions des notions introduites.

Ceci est valable en tout point P de la variété. Nous pouvons donc trouver une base orthonormale en chaque point de la variété. En revanche, il n'y a aucune raison pour que

chacune de ces bases soit associée à un même système de coordonnées. Il n'y a pas en relativité générale de système de coordonnées global dans lequel la métrique peut se réduire à la métrique minkowskienne.

Cela conduit à la notion de référentiel inertiel local : nous allons définir un système de coordonnées dans lequel la métrique est constante « au voisinage » d'un événement P de l'espace-temps. Un tel référentiel est une première étape vers la construction d'un système de coordonnées opératoire, utile pour la modélisation d'une expérience de laboratoire.

2.1.2 Le référentiel inertiel local

Nous choisissons un système de coordonnées \mathbf{x} arbitraire, défini sur un ouvert \mathcal{U} de la variété, et un événement O de \mathcal{U} , dont les coordonnées sont (x_O^α) . Nous introduisons au voisinage de O , dans un ouvert $\mathcal{U}_O \in \mathcal{U}$ que nous précisons de façon *ad hoc*, un système de coordonnées local \mathbf{X} . Pour un souci de simplicité, le point O est choisi comme origine du référentiel local, ie. $X_O^{\hat{\alpha}} = 0$. Le changement de coordonnées de \mathbf{X} vers \mathbf{x} est une application $\mathcal{Y} : \mathbf{X}(\mathcal{U}_O) \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbf{x}(\mathcal{U}_O) \subset \mathbb{R}^4$ (voir Fig. 2.1). Elle doit être différentiable et bijective. Son inverse doit elle aussi être différentiable*. Nous introduisons alors la différentielle de \mathcal{Y} au point[†] O , qui est une application linéaire définie par la matrice jacobienne

$$e_{\hat{\alpha}}^\beta = \left\{ Y^\beta_{,\hat{\alpha}} \right\}_O = \left\{ \frac{\partial Y^\beta}{\partial X^{\hat{\alpha}}} \right\}_O ,$$

où les Y^β sont les composantes de l'application vectorielle \mathcal{Y} . Cette notation pour la matrice est pratique car $(e_{\hat{\alpha}}^\beta)_{\beta=0..3}$ représente les composantes du vecteur $\{\partial_{\hat{\alpha}}\}_O$ du repère naturel associé à \mathbf{X} au point O dans le repère naturel associé à \mathbf{x} :

$$e_{\hat{\alpha}} = e_{\hat{\alpha}}^\beta \{\partial_\beta\}_O = \{\partial_{\hat{\alpha}}\}_O \in \mathcal{T}_O(\mathcal{M}) .$$

La matrice jacobienne au point O de l'inverse du changement de coordonnées est l'inverse de la matrice $e_{\hat{\alpha}}^\beta$, que nous notons $e_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}$. Elles vérifient les relations

$$\begin{cases} e_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}} e_{\hat{\alpha}}^\mu &= \delta_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} \\ e_{\hat{\mu}}^{\hat{\beta}} e_{\hat{\beta}}^\nu &= \delta_{\hat{\mu}}^\nu , \end{cases}$$

où δ est le symbole de Kronecker. De façon symétrique, $(e_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}})_{\hat{\beta}=0..3}$ représente les coordonnées du vecteur $\{\partial_{\hat{\alpha}}\}_O \in \mathcal{T}_O(\mathcal{M})$ dans le repère naturel associé à \mathbf{X} .

*On suppose les changements de coordonnées, et leurs inverses, de classe C^∞ , ce qui n'est pas nécessaire en toute généralité.

[†]En toute rigueur, O est un point de la variété, mais le système de coordonnées \mathbf{x} lui fait correspondre sans ambiguïté le point $(x_O^\alpha) \in \mathbb{R}^4$, que l'on appelle aussi O .

Le développement de Taylor de Y^μ au voisinage de l'événement O est alors

$$Y^\mu \left(X^{\hat{\theta}} \right) = x_O^\mu + e_{\hat{\alpha}}^\mu X^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2} f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\mu X^{\hat{\alpha}} X^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(X^3) , \quad (2.2)$$

où $X = \max(X^{\hat{\alpha}})$, et

$$f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\mu = \left\{ Y^\mu_{,\hat{\alpha}\hat{\beta}} \right\}_O .$$

$f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\mu$ est symétrique sur ses indices inférieures car la dérivée partielle est commutative. La matrice jacobienne du changement de coordonnées \mathcal{Y} en un point $P \in \mathcal{U}_O$ est alors

$$a_{\hat{\alpha}}^\mu = e_{\hat{\alpha}}^\mu + f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\mu X^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(X^2) . \quad (2.3)$$

Ce sont aussi les coordonnées du vecteur $\mathbf{a}_{\hat{\alpha}} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{M})$ du repère naturel associé à \mathbf{X} . Étant donné le tenseur métrique dans le repère naturel associé à \mathbf{x} , nous calculons les composantes du tenseur métrique dans le référentiel inertiel local :

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(P) = g(\mathbf{a}_{\hat{\alpha}}, \mathbf{a}_{\hat{\beta}}) = g\left(a_{\hat{\alpha}}^\mu \{\partial_\mu\}_P, a_{\hat{\beta}}^\nu \{\partial_\nu\}_P\right) = a_{\hat{\alpha}}^\mu a_{\hat{\beta}}^\nu g_{\mu\nu}(P) , \quad (2.4)$$

où

$$g_{\mu\nu}(P) = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} e_{\hat{\beta}}^\alpha X^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(X^2) .$$

Nous notons la valeur d'une application au point O avec une barre sur l'application. D'après les relations (2.3) et (2.4) :

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\theta}} = (\bar{g}_{\mu\nu,\sigma} + \bar{g}_{\mu\rho} f_{\sigma\nu}^\rho + \bar{g}_{\nu\rho} f_{\sigma\mu}^\rho) e_{\hat{\alpha}}^\mu e_{\hat{\beta}}^\nu e_{\hat{\theta}}^\sigma + \mathcal{O}(X) ,$$

où nous introduisons $f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\rho = f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\rho e_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\nu}}^{\hat{\beta}}$, qui est symétrique sur ses indices inférieurs. Dans un référentiel inertiel de la relativité restreinte, le tenseur métrique est constant dans l'espace-temps. Pour se rapprocher le plus possible d'un référentiel inertiel global, le tenseur métrique d'un référentiel inertiel local doit donc être tel que :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\theta}} = 0} . \quad (2.5)$$

Dans le cadre d'une théorie métrique sans torsion (comme la relativité générale), cette équation à une solution simple :

$$f_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\rho = -\bar{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^\rho = -\frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\theta} (\bar{g}_{\mu\theta,\nu} + \bar{g}_{\nu\theta,\mu} - \bar{g}_{\mu\nu,\theta}) , \quad (2.6)$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ est la connection de Levi-Civita, ou symbole de Christoffel de seconde espèce. D'après la relation (2.2), le changement de coordonnées s'écrit*

$$x^\mu = x_O^\mu + e_{\hat{\alpha}}^\mu X^{\hat{\alpha}} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu e_{\hat{\alpha}}^\theta e_{\hat{\beta}}^\sigma X^{\hat{\alpha}} X^{\hat{\beta}} + \mathcal{O}(X^3) .$$

En l'inversant, nous obtenons

$$X^{\hat{\alpha}} = e_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \left(\delta x^\mu + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu \delta x^\theta \delta x^\sigma \right) + \mathcal{O}(\delta x^3) , \quad (2.7)$$

où nous introduisons $\delta x^\mu = x^\mu - x_O^\mu$.

Paramétrisons les trajectoires croisant l'origine O par la distance propre s , ie. $X^{\hat{\alpha}} = X^{\hat{\alpha}}(s)$. D'après l'équation (2.7), nous obtenons au point O

$$\frac{d^2 X^{\hat{\alpha}}}{ds^2} = e_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu \frac{dx^\theta}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \right) ;$$

ce qui s'écrit aussi, en introduisant la quadri-vitesse $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$:

$$\frac{dU^{\hat{\alpha}}}{ds} = e_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \frac{\nabla u^\mu}{ds} = e_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \left(\frac{du^\mu}{ds} + \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu u^\theta u^\sigma \right) , \quad (2.8)$$

où ∇ est la dérivée covariante. Nous appelons « lignes droites » du référentiel inertiel les trajectoires passant par l'origine et d'équation au point O :

$$\frac{dU^{\hat{\alpha}}}{ds} = 0 ,$$

par analogie avec la géométrie euclidienne. D'après la relation (2.8), celles-ci coïncident avec les géodésiques de l'espace-temps courbe, d'équations

$$\frac{\nabla u^\mu}{ds} = 0 .$$

Ces trajectoires coïncident-elles au-delà du point O ? Pour répondre, il faut mener le développement de Taylor (2.2) à un ordre plus élevé, ce que nous ne ferons pas dans cette section, car les calculs sont assez lourds. De plus, nous ne préciserons le domaine de validité des coordonnées locales que dans des cas précis (Secs. 2.3.2 & 2.3.3).

D'après l'équation (2.8), la loi de chute libre d'un corps d'épreuve s'obtient en remplaçant par une dérivation covariante la dérivée simple figurant dans le principe d'inertie formulé en relativité restreinte en utilisant des coordonnées galiléennes. Nous suivrons ce même guide pour toutes les équations de la physique : nous remplacerons les dérivées partielles par la

*Il est d'usage de prendre la même notation pour l'application représentant le changement de coordonnées, et les coordonnées elle-mêmes.

dérivée covariante, ainsi que le tenseur de Minkowski par le tenseur métrique de l'espace-temps considéré. Cette procédure se nomme le couplage minimal* (voir Sec. 3.1.2). Il existe d'autres façons de généraliser les équations de la relativité restreinte : toute équation qui se réduit à une équation de la relativité restreinte à la limite $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ peut être valable.

Une formulation équivalente Nous allons donner une condition équivalente à (2.5) pour trouver l'expression de $f^\rho_{\mu\nu}$, qui nous sera utile pour la suite. La « ligne droite » Γ_ξ du référentiel inertiel local vérifie l'équation

$$\Gamma_\xi : X^{\hat{\alpha}} = \xi^{\hat{\alpha}} u, \quad (2.9)$$

où u est le paramètre de Γ_ξ et $\xi = \xi^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$ est le vecteur tangent à Γ_ξ au point O . La condition (2.5) équivaut au transport parallèle des vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{\sigma}}$ le long de Γ_ξ au point O . En effet, l'équation du transport parallèle de $\mathbf{a}_{\hat{\sigma}}$ est

$$\frac{da^\mu_{\hat{\sigma}}}{du} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} a^\alpha_{\hat{\sigma}} a^\beta_{\hat{\theta}} \frac{dX^{\hat{\theta}}}{du} = 0 .$$

D'après les équations (2.3) et (2.9) nous obtenons :

$$f^\mu_{\hat{j}\hat{l}} = -\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} e^\alpha_{\hat{l}} e^\beta_{\hat{j}} + O(u) ,$$

ce qui, au point O , où $u = 0$, nous donne bien l'expression (2.6) trouvée plus haut.

Référentiel local minkowskien Nous définissons un référentiel local minkowskien (aussi appelé lorentzien par Misner *et al.* [169]). C'est un référentiel inertiel local dans lequel

$$\bar{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e^\mu_{\hat{\alpha}} e^\nu_{\hat{\beta}} \bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} , \quad (2.10)$$

ie. tel que le repère défini par $(e_{\hat{\alpha}})$ est une tétrade.

Coordonnées normales de Riemann Un référentiel inertiel local est défini localement autour d'un événement de l'espace-temps. Les coordonnées normales de Riemann [188] sont souvent utilisées, car elles réalisent un tel référentiel inertiel local. Prenons comme origine l'événement O , P un événement au voisinage de O , et $(e_{\hat{\alpha}})$ une base de l'espace tangent $\mathcal{T}_O(\mathcal{M})$. Si P est assez proche de O alors il existe une unique géodésique qui relie les deux événements. Soit $\xi \in \mathcal{T}_O(\mathcal{M})$ le vecteur unitaire tangent à cette géodésique en O . Nous le décomposons sur la base choisie : $\xi = \xi^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$. Soit u la longueur propre le long de la géodésique entre O et P . Les coordonnées normales de Riemann du point P sont définies par :

*Le principe du couplage minimal s'applique aux champs et pas aux potentiels (en électromagnétisme par exemple).

$$X^{\hat{\alpha}} = \xi^{\hat{\alpha}} u .$$

Nous insistons sur le fait que les coordonnées normales de Riemann ne sont pas les seules coordonnées qui réalisent un référentiel inertiel local. En effet, d’après l’équation (2.8), il suffit que les « lignes droites » du référentiel inertiel local coïncident en O avec des géodésiques, mais elles peuvent s’en éloigner par la suite. Dans le cas des coordonnées normales de Riemann, les « lignes droites » passant par O sont des géodésiques, par construction ; cela revient à transporter parallèlement les vecteurs $(e_{\hat{\alpha}})$ tout le long des « lignes droites » du référentiel inertiel local, et non seulement en O .

2.2 Le référentiel de Fermi

2.2.1 Le référentiel propre

Nous avons trouvé le changement de coordonnées permettant de se rapprocher en un événement donné le plus possible d’un référentiel inertiel de la relativité restreinte. Cela nous a permis d’exploiter le principe d’équivalence d’Einstein. En poussant ce raisonnement plus loin, [Fermi](#) [105–107] a montré que nous pouvons définir un référentiel beaucoup plus adapté aux observateurs, et donc aux expériences. L’origine spatiale de ce référentiel est placée sur l’observateur, de sorte que dans l’espace-temps elle décrit une courbe qui est la trajectoire de l’observateur. Les travaux de [Riemann](#) nous ont appris qu’en un point donné de la courbe, nous pouvons définir un système de coordonnées tel qu’au voisinage de ce point la métrique soit constante. [Fermi](#) a montré que l’on pouvait définir un système de coordonnées tout le long de la trajectoire de l’observateur, tel qu’au voisinage de cette trajectoire, la métrique se réduise à celle de la relativité restreinte (au premier ordre). De plus, ce référentiel est réalisable par l’observateur, s’il dispose d’une horloge pour mesurer son temps propre, et d’un accéléromètre et de gyroscopes pour contrôler sa trajectoire. [Fermi](#) a défini ce référentiel pour un observateur en mouvement accéléré, et [Manasse et Misner](#) [160] ont étendu cette idée à un observateur en mouvement accéléré et en rotation. Tout en étendant cette idée, ils l’ont spécialisée à un système de coordonnées précis, qui ne rend pas compte de tous les systèmes de coordonnées réalisables par un observateur ; de la même façon que les coordonnées normales de Riemann ne sont pas les seules qui réalisent un système de coordonnées inertiel.

Dans ce chapitre, nous allons étendre l’idée de [Fermi](#), sans se restreindre au système de coordonnées choisi par [Manasse et Misner](#) [160]. Pour bien comprendre l’idée initiale de [Fermi](#), nous donnons une traduction* de son premier article [105] sur les coordonnées qui ont gardé son nom en annexe C. Dans un premier temps nous allons définir un référentiel

*Cet article fondateur écrit en italien est rarement cité.

propre qui est une généralisation du référentiel propre de [Misner *et al.* \[169, p. 327\]](#). Il est entièrement déterminé par les deux idées directrices suivantes :

1. Sur la trajectoire de l'observateur, la coordonnée temporelle du référentiel propre est égale au temps propre mesuré par l'observateur.
2. Sur la trajectoire de l'observateur, les dérivées spatiales de la partie spatiale de la métrique sont nulles.

La première idée est celle de [Fermi](#) dans ses trois articles fondateurs [105–107]. La deuxième idée est une limitation de la condition (2.5) du référentiel inertiel local. En effet, dans un référentiel local non inertiel, certaines dérivées de la métrique ne peuvent pas être nulles (voir l'observateur accéléré de la relativité restreinte [169, Chap. 6]).

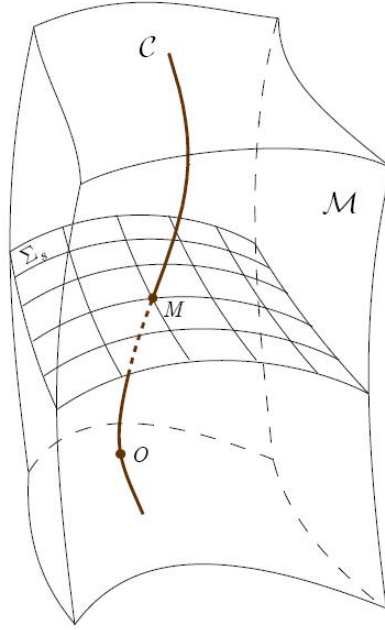


FIG. 2.2 – Au voisinage du point $M(s)$, la fonction \mathcal{V} est développée dans l'hypersurface $\Sigma_s \equiv \{P \in \mathcal{M}, X^0(P) = s\}$. Dans un voisinage de M suffisamment petit, l'hypersurface Σ_s est du genre espace.

Nous supposons la trajectoire \mathcal{C} de l'observateur connue dans un système de coordonnées initial \mathbf{x} . s est la valeur de l'intégrale $\int ds$ prise le long de \mathcal{C} entre un point O pris comme origine et un point M le long de cette trajectoire*. Nous l'utilisons comme paramètre :

$$\mathcal{C} : x^\mu = f^\mu(s) .$$

Soit \mathbf{X} le système de coordonnées du référentiel propre. La première idée implique que

* s est égal au temps propre, à un facteur c près.

$$\boxed{X^{\hat{0}}(\mathcal{C}) = s} .$$

L'origine du référentiel, O , est choisie telle que $x_O^\mu = f^\mu(0)$. Comme dans le chapitre précédent, nous définissons le changement de coordonnées \mathcal{Y} . À la différence du chapitre précédent, nous allons effectuer le développement de Taylor dans l'hypersurface $\Sigma_s \equiv \{P \in \mathcal{M}, X^{\hat{0}}(P) = s\}$. Par rapport au référentiel inertiel local, nous libérons la coordonnée temporelle (voir Fig. 2.2). Soit M un événement sur la trajectoire de l'observateur tel que $x_M^\mu = f^\mu(s)$. Nous effectuons le développement de Taylor de \mathcal{Y} au voisinage de M dans l'hypersurface Σ_s :

$$Y^\mu(X^{\hat{\alpha}}) = f^\mu(s) + e_{\hat{j}}^\mu(s)X^{\hat{j}} + \frac{1}{2}f_{\hat{j}\hat{k}}^\mu(s)X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) , \quad (2.11)$$

où les lettres latines vont de 1 à 3, et

$$\begin{cases} e_{\hat{j}}^\mu(s) &= \{Y_{\cdot\hat{j}}^\mu\}_M \\ f_{\hat{j}\hat{k}}^\mu(s) &= \{Y_{\cdot\hat{j}\hat{k}}^\mu\}_M . \end{cases}$$

Par souci de simplicité, $X^{\hat{i}}(\mathcal{C}) = 0$, ie. la trajectoire représente l'origine spatiale du nouveau référentiel. Nous déduisons immédiatement

$$e_{\hat{0}}^\mu(s) = \{Y_{\cdot\hat{0}}^\mu\}_M = \frac{df^\mu}{ds}(s) = u^\mu(s) ,$$

où u^μ sont les composantes de la quadri-vitesse de l'observateur exprimées dans le repère naturel associé à \mathbf{x} . Ainsi le vecteur $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ du repère du référentiel propre est fixé par la trajectoire de l'observateur, les trois autres vecteurs $\mathbf{e}_{\hat{j}}$ sont choisis de telle manière que $(\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})$ forme une base de l'espace tangent en chaque point de la trajectoire.

La deuxième idée se traduit par :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{j}\hat{k},\hat{l}} = 0} . \quad (2.12)$$

Cela fixe le choix des fonctions $f_{\hat{j}\hat{k}}^\sigma$. Les calculs ne sont pas détaillés car le raisonnement est le même que dans la section 2.1.2. Nous obtenons :

$$f_{\hat{j}\hat{k}}^\sigma(s) = -e_{\hat{j}}^\mu(s)e_{\hat{k}}^\nu(s)\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \quad (2.13)$$

Ici la barre dénote la valeur de la fonction au point M . D'après le changement de coordonnées (2.11), en un point $P \in \Sigma_s$, nous obtenons :

$$\begin{cases} a_{\hat{0}}^\mu &= u^\mu + \dot{e}_j^\mu X^{\hat{j}} + \mathcal{O}(X^2) \\ a_{\hat{i}}^\mu &= e_i^\mu - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu e_j^\alpha e_i^\beta X^{\hat{j}} + \mathcal{O}(X^2) \end{cases}, \quad (2.14)$$

où $(\dot{}) \equiv d/ds$. Les composantes de la métrique dans le système de coordonnées initial sont connues. D'après les relations de transformation des composantes de la métrique :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \bar{g}_{\mu\nu} e_{\hat{\alpha}}^\mu e_{\hat{\beta}}^\nu} \quad (2.15)$$

et

$$\bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}} = 2\bar{g}_{\mu\nu} \dot{e}_j^\mu u^\nu + \bar{g}_{\mu\nu,\beta} u^\mu u^\nu e_j^\beta \quad (2.16)$$

$$\bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}} = \left[\bar{g}_{\mu\nu} \dot{e}_j^\mu + \left(\bar{g}_{\alpha\nu,\mu} u^\alpha - \bar{g}_{\alpha\beta} u^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta \right) e_j^\mu \right] e_{\hat{m}}^\nu. \quad (2.17)$$

Simplifions les équations (2.16) et (2.17) avec les relations

$$g_{\mu\nu,\beta} = \Gamma_{\mu-\nu\beta} + \Gamma_{\nu-\mu\beta} \quad (2.18)$$

et

$$\dot{e}_{\hat{k}}^\mu = \frac{\nabla e_{\hat{k}}^\mu}{ds} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu u^\beta e_{\hat{k}}^\alpha. \quad (2.19)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}} &= 2\bar{g}_{\mu\nu} \frac{\nabla e_{\hat{j}}^\mu}{ds} u^\nu \\ \bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}} &= \bar{g}_{\mu\nu} \frac{\nabla e_{\hat{j}}^\mu}{ds} e_{\hat{m}}^\nu. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir des quantités de la même forme que celles obtenues en relativité restreinte, nous introduisons $\gamma^\nu = \nabla u^\nu / ds$, la quadri-accélération de l'observateur, et nous définissons la quantité anti-symétrique suivante :

$$\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \left(e_{\hat{\alpha}}^\mu \frac{\nabla e_{\hat{\beta}}^\nu}{ds} - e_{\hat{\beta}}^\mu \frac{\nabla e_{\hat{\alpha}}^\nu}{ds} \right). \quad (2.20)$$

La dérivation covariante des relations de transformation implique, au point M :

$$\bar{g}_{\mu\nu} e_{\hat{\alpha}}^\mu \frac{\nabla e_{\hat{\beta}}^\nu}{ds} = -\bar{g}_{\mu\nu} e_{\hat{\beta}}^\mu \frac{\nabla e_{\hat{\alpha}}^\nu}{ds}.$$

Les dérivées spatiales de la métrique (2.16) et (2.17) s'écrivent alors simplement :

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}} &= -2\gamma_{\hat{j}} \\ \bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}} &= \Omega_{\hat{m}\hat{j}}\end{aligned}}, \quad (2.21)$$

où $\gamma_{\hat{j}} = \Omega_{\hat{j}\hat{0}} = \bar{g}_{\mu\nu}e_{\hat{j}}^{\mu}\gamma^{\nu}$. La fonction $\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ définit le transport de la tétrade le long de la trajectoire de l'observateur*. En effet, la relation (2.20) peut aussi s'écrire :

$$\frac{\nabla e_{\hat{\beta}}^{\mu}}{ds} = \Omega^{\mu}_{\nu} e_{\hat{\beta}}^{\nu}, \quad (2.22)$$

où $\Omega^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\sigma}\Omega_{\sigma\nu} = g^{\mu\sigma}e_{\sigma}^{\hat{\alpha}}e_{\nu}^{\hat{\beta}}\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$; ou bien, d'après l'équation (2.19) :

$$\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu} \left(e_{\hat{\alpha}}^{\mu}\dot{e}_{\hat{\beta}}^{\nu} - e_{\hat{\beta}}^{\mu}\dot{e}_{\hat{\alpha}}^{\nu} \right) + \frac{1}{2}(\bar{g}_{\sigma\mu,\nu} - \bar{g}_{\sigma\nu,\mu}) e_{\hat{\alpha}}^{\mu}e_{\hat{\beta}}^{\nu}u^{\sigma}. \quad (2.23)$$

Pour écrire la métrique dans le référentiel propre de façon simple, nous choisissons les vecteurs $e_{\hat{\alpha}}$ de telle sorte qu'ils forment une tétrade, ie. $\bar{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Alors, d'après les équations (2.12), (2.15) et (2.21) :

$$\boxed{\begin{aligned}ds^2 &= [1 - 2\gamma_{\hat{j}}X^{\hat{j}} + \mathcal{O}(X^2)] dT^2 \\ &\quad + [2\Omega_{\hat{m}\hat{j}}X^{\hat{j}} + \mathcal{O}(X^2)] dX^{\hat{m}}dT \\ &\quad + [\eta_{\hat{l}\hat{m}} + \mathcal{O}(X^2)] dX^{\hat{l}}dX^{\hat{m}}\end{aligned}} \quad (2.24)$$

Les « lignes droites » du référentiel propre Dans la section 2.1.2, nous avons montré qu'annuler les dérivées des composantes de la métrique à l'origine du référentiel inertiel local revenait à transporter parallèlement les vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{\alpha}}$ le long des « lignes droites » à l'origine du référentiel. On peut faire la même remarque ici, mais dans l'hypersurface Σ_s . Ainsi, pour le référentiel propre, annuler les dérivées spatiales des composantes spatiales de la métrique revient à transporter parallèlement les vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{i}}$ le long des « lignes droites » de Σ_s à l'origine spatiale du référentiel, ie. au point M (voir Fig. 2.3). C'est ce que nous allons montrer maintenant.

L'équation de la ligne droite $\Gamma_{\xi} \in \Sigma_s$ passant par M est

$$\Gamma_{\xi} : X^{\hat{j}} = \xi^{\hat{j}}u, \quad (2.25)$$

où u est le paramètre de Γ_{ξ} et $\xi = \xi^{\hat{j}}e_{\hat{j}} \in \mathcal{T}_M(\Sigma_s)$ est le vecteur tangent à Γ_{ξ} au point M . C'est un vecteur de type espace. L'équation du transport parallèle de $a_{\hat{i}}$ le long de Γ_{ξ} est

*Généralement, le transport du repère le long de la trajectoire de l'observateur est fixé *a priori*. Cela n'est pas nécessaire pour trouver la forme de la métrique dans le référentiel propre.

$$\frac{da_l^\mu}{du} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} a_l^\alpha a_j^\beta \frac{dX^j}{du} = 0 . \quad (2.26)$$

D'après les équations (2.14) et (2.25) nous déduisons

$$f_{j\hat{l}}^\mu = -\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} e_l^\alpha e_j^\beta + O(u) , \quad (2.27)$$

ce qui au point M , où $u = 0$, nous donne bien l'expression (2.13).

Le transport de Fermi-Walker Comme en relativité restreinte, nous décomposons le tenseur $\Omega_{\mu\nu}$ en une partie « Fermi-Walker » et une rotation spatiale pure. Pour cela nous utilisons les relations $e_\alpha^{\hat{0}} = u_\alpha$ et $e_\alpha^{\hat{j}} \gamma_j = \gamma_\alpha$. Alors :

$$\Omega_{\alpha\beta} = e_\alpha^{\hat{\mu}} e_\beta^{\hat{\nu}} \Omega_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \gamma_\alpha u_\beta - \gamma_\beta u_\alpha + e_\alpha^{\hat{i}} e_\beta^{\hat{j}} \Omega_{\hat{i}\hat{j}} . \quad (2.28)$$

Nous introduisons le vecteur $\Omega^{\hat{k}}$ défini tel que

$$\Omega_{\hat{i}\hat{j}} = \epsilon_{ijk} \Omega^{\hat{k}} , \quad (2.29)$$

où ϵ est le symbole de Levi-Civita. En définissant ensuite $\Omega^\sigma = e_k^\sigma \Omega^{\hat{k}}$, l'équation (2.28) se réécrit :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha u_\beta - \gamma_\beta u_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} \Omega^\sigma u^\theta , \quad (2.30)$$

où $\epsilon_{\mu\nu\sigma\theta} = \epsilon_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\rho}\hat{\theta}} e_\mu^{\hat{\alpha}} e_\nu^{\hat{\beta}} e_\sigma^{\hat{\rho}} e_\theta^{\hat{\theta}}$. Le triplet (e_j) , qui est la partie spatiale de la tétrade $(e_{\hat{\alpha}})$, représentent une base de $\mathcal{T}_M(\Sigma_s)$. Nous l'appellerons le repère spatial au point M . $\Omega^{\hat{k}}$ est le vecteur de rotation de ce repère spatial, tel qu'il peut être mesuré par des gyroscopes. $\gamma^{\hat{j}}$ est le vecteur accélération de l'observateur, tel qu'il peut être mesuré par des accéléromètres.

2.2.2 Une extension du référentiel propre

Jusqu'ici, les référentiels introduits nous ont permis de retrouver l'espace-temps de la relativité restreinte, que ce soit en un événement, avec le référentiel inertiel local, ou bien le long de la trajectoire d'un observateur quelconque, avec le référentiel propre. Pourtant, il est important de déterminer les différences avec la relativité restreinte induites par la gravitation. Pour cela, nous allons étendre l'idée du référentiel propre, en calculant l'ordre suivant dans le développement de Taylor (2.11) du changement de coordonnées \mathcal{Y} . Nous obtenons :

$$Y^\mu(X^{\hat{\alpha}}) = f^\mu(s) + e_j^\mu(s) X^{\hat{j}} + \frac{1}{2} f_{j\hat{k}}^\mu(s) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \frac{1}{6} f_{j\hat{k}\hat{l}}^\mu(s) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \mathcal{O}(X^4) , \quad (2.31)$$

où $f_{\hat{j}\hat{k}}^\mu$ est donné par la relation (2.13), et

$$f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu(s) = \left\{ Y_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu \right\}_M .$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} a_0^\mu &= u^\mu + e_{\hat{j}}^\mu X^{\hat{j}} + \frac{1}{2} \dot{f}_{\hat{j}\hat{k}}^\mu X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \\ a_{\hat{l}}^\mu &= e_{\hat{l}}^\mu + f_{\hat{j}\hat{l}}^\mu X^{\hat{j}} + \frac{1}{2} f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) . \end{cases}$$

Les nouvelles fonctions $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu$ définissent de quelle façon se prolonge le transport des vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{j}}$ le long les « lignes droites » de Σ_s (voir Fig. 2.3). Une façon naturelle est de prolonger le transport parallèle, comme pour les coordonnées normales de Riemann (voir Sec. 2.2.1). Ce choix simplifie les calculs. C'est ce qu'ont fait [Manasse et Misner \[160\]](#) ; ils ont alors appelé les coordonnées obtenues les coordonnées normales de Fermi, par analogie avec celles de Riemann. C'est ensuite devenu tellement classique que certains auteurs les nomment les coordonnées de Fermi, en oubliant leur caractère normal. Pourtant, plusieurs auteurs soulignent que ce n'est pas le seul prolongement possible. [Synge \[205, p. 85\]](#) le qualifie d'artificiel : « from a physical standpoint, (this choice) is somewhat artificial ». [Marzlin \[162\]](#) propose un prolongement différent qui est fondé sur un critère physique et étudie une expérience qui permettrait de trancher entre différents choix possibles. Il est important de savoir que du choix de ce prolongement va dépendre la valeur des déviations induites par la gravitation sur la métrique. Ce choix n'est donc pas anodin. Dans cette section, nous proposons de calculer la métrique dans un cadre général, où les fonctions $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu$ restent arbitraires.

Les termes d'ordre 0 et du premier ordre de la métrique sont déjà connus. Ce sont les mêmes que ceux du référentiel propre. Nous cherchons maintenant les termes du deuxième ordre, de la même façon que dans le chapitre précédent. Les relations de transformation des composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = a_{\hat{\alpha}}^\mu a_{\hat{\beta}}^\nu g_{\mu\nu} ,$$

avec

$$g_{\mu\nu}(X^{\hat{\alpha}}) = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} e_{\hat{j}}^\alpha X^{\hat{j}} + \frac{1}{2} \left(\bar{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} e_{\hat{j}}^\alpha e_{\hat{k}}^\beta + \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} f_{\hat{j}\hat{k}}^\alpha \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) .$$

La partie temporelle D'après les formules de transformation, les dérivées spatiales des composantes temporelles de la métrique s'écrivent, le long de \mathcal{C} :

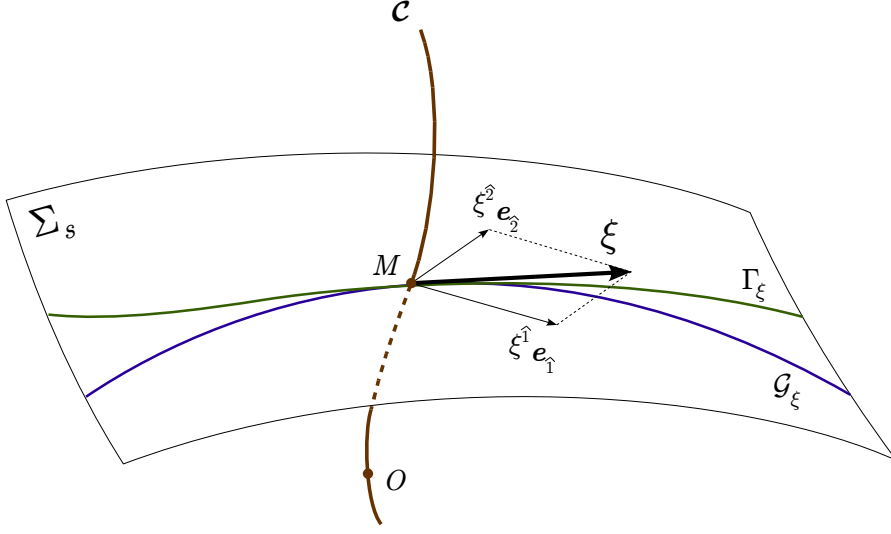


FIG. 2.3 — Illustration en deux dimensions d'une « ligne droite » du référentiel propre, appartenant à l'hypersurface Σ_s . La ligne \mathcal{G}_ξ , une géodésique spatiale, est obtenue par transport parallèle des vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{\alpha}}$. Γ_ξ résulte d'un prolongement quelconque du transport des vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{\alpha}}$. ξ est le vecteur tangent commun aux courbes \mathcal{G}_ξ et Γ_ξ au point M .

$$\bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}\hat{k}} = \left(\bar{g}_{\mu\nu} \dot{f}_{\hat{j}\hat{k}}^\mu + 2\bar{g}_{\mu\nu,\beta} e_{\hat{j}}^\beta \dot{e}_{\hat{k}}^\mu + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu,\beta} f_{\hat{j}\hat{k}}^\beta u^\mu + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} e_{\hat{j}}^\alpha e_{\hat{k}}^\beta u^\mu \right) u^\nu. \quad (2.32)$$

Des équations (2.13) et (2.19) nous déduisons la relation suivante :

$$-\dot{f}_{\hat{j}\hat{k}}^\mu = \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{\nabla e_{\hat{j}}^\alpha}{dT} e_{\hat{k}}^\beta + \frac{\nabla e_{\hat{k}}^\beta}{dT} e_{\hat{j}}^\alpha \right) + \left(\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta,\nu} - \bar{\Gamma}^\mu_{\beta\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha} - \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\nu\beta} \right) e_{\hat{j}}^\alpha e_{\hat{k}}^\beta u^\nu. \quad (2.33)$$

En insérant les relations (2.13), (2.18), (2.19) et (2.33) dans l'équation (2.32) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}\hat{k}} &= \bar{g}_{\mu\nu} \frac{\nabla e_{\hat{j}}^\mu}{dT} \frac{\nabla e_{\hat{k}}^\nu}{dT} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu-\alpha\beta,\nu} + \bar{\Gamma}_{\mu-\alpha\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\beta\nu} - \bar{g}_{\mu\sigma,\alpha} \bar{\Gamma}^\sigma_{\beta\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu,\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta} \right) e_{\hat{j}}^\alpha e_{\hat{k}}^\beta u^\mu u^\nu. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La dérivation covariante de la relation (2.18) mène à :

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\mu-\nu\beta,\alpha} + \Gamma_{\nu-\mu\beta,\alpha} + g_{\theta\nu,\alpha} \Gamma^\theta_{\beta\mu} + g_{\theta\mu,\alpha} \Gamma^\theta_{\beta\nu}. \quad (2.35)$$

Enfin, en simplifiant l'équation (2.34) avec les relations (2.22) et (2.35) nous obtenons :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{0}\hat{0},\hat{j}\hat{k}} = \Omega_{\hat{\alpha}\hat{j}}\Omega_{\hat{k}}^{\hat{\alpha}} + \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}}}, \quad (2.36)$$

où* $\bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} = \bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}u^\mu u^\nu e_j^\alpha e_k^\beta$. Une remarque importante, que nous commenterons plus amplement par la suite, est que la partie temporelle ne dépend pas des fonctions $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\alpha$, ie. du prolongement choisi.

La partie croisée Grâce aux relations de transformations, nous calculons les dérivées spatiales des composantes croisées de la métrique, le long de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}\hat{k}} &= \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu} \left(f_{\hat{j}\hat{k}}^\mu e_{\hat{m}}^\nu + 2\dot{e}_{\hat{k}}^\mu f_{\hat{j}\hat{m}}^\nu + u^\mu f_{\hat{j}\hat{k}\hat{m}}^\nu \right) + \bar{g}_{\mu\nu,\beta} e_j^\beta \left(u^\mu f_{\hat{k}\hat{m}}^\nu + e_{\hat{m}}^\nu \dot{e}_{\hat{k}}^\mu \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} e_j^\alpha e_k^\beta + \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} f_{\hat{j}\hat{k}}^\alpha \right) u^\mu e_{\hat{m}}^\nu. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En insérant les relations (2.13), (2.18), (2.19) et (2.33) dans l'équation (2.37), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}\hat{k}} &= \frac{1}{2}u^\mu f_{\mu-\hat{j}\hat{k}\hat{m}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{g}_{\mu\theta,\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{\theta-\alpha\beta,\mu} - \bar{g}_{\mu\theta,\sigma} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma - 2\bar{g}_{\mu\sigma,\alpha} \bar{\Gamma}_{\beta\theta}^\sigma \right) e_j^\alpha e_k^\beta e_{\hat{m}}^\theta u^\mu, \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $f_{\mu-\hat{j}\hat{k}\hat{m}} = \bar{g}_{\mu\nu} f_{\hat{j}\hat{k}\hat{m}}^\nu$.

Finalement, en simplifiant l'équation (2.38) avec la relation (2.35) :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{0}\hat{m},\hat{j}\hat{k}} = \frac{2}{3}\bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} + \frac{1}{2}\phi_{\hat{0}-\hat{j}\hat{k}\hat{m}}}, \quad (2.39)$$

avec $\bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} = \bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta}u^\mu e_j^\alpha e_{\hat{m}}^\nu e_k^\beta$, $\phi_{\hat{0}-\hat{j}\hat{k}\hat{m}} = \phi_{\mu-\alpha\beta\theta} e_j^\alpha e_k^\beta e_{\hat{m}}^\theta u^\mu$, et[†]

$$\boxed{\phi_{\mu-\alpha\beta\theta} = f_{\mu-\alpha\beta\theta} + \left(\frac{1}{3}\bar{\Gamma}_{\mu-\theta\beta,\alpha} - \frac{2}{3}\bar{\Gamma}_{\mu-\theta\sigma} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \right)_{(\alpha\beta\theta)}}, \quad (2.40)$$

où $f_{\mu-\alpha\beta\theta}$ est défini par $f_{\mu-\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = f_{\mu-\alpha\beta\theta} e_j^\alpha e_k^\beta e_l^\theta$. $\phi_{\mu-\alpha\beta\theta}$ est clairement symétrique en $(\alpha\beta\theta)$.

*On rappelle que la convention choisie pour le tenseur de Riemann est $R_{\alpha\nu\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\nu,\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \Gamma_{\beta\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma$.

[†]L'indice $(\alpha\beta\theta)$ indique les permutations paires de $(\alpha\beta\theta)$: $A_{(\alpha\beta\theta)} = A_{\alpha\beta\theta} + A_{\theta\alpha\beta} + A_{\beta\theta\alpha}$.

La partie spatiale Les dérivées spatiales des composantes spatiales de la métrique s'obtiennent avec les relations de transformation, le long de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\hat{l}\hat{m},\hat{j}\hat{k}} &= \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu} \left(f_{\hat{j}\hat{l}}^{\mu} e_{\hat{m}}^{\nu} + f_{\hat{j}\hat{k}\hat{m}}^{\nu} e_{\hat{l}}^{\mu} + 2f_{\hat{j}\hat{l}}^{\mu} f_{\hat{k}\hat{m}}^{\nu} \right) + \bar{g}_{\mu\nu,\beta} e_{\hat{k}}^{\beta} \left(f_{\hat{j}\hat{l}}^{\mu} e_{\hat{m}}^{\nu} + f_{\hat{j}\hat{m}}^{\nu} e_{\hat{l}}^{\mu} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\bar{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} e_{\hat{j}}^{\alpha} e_{\hat{k}}^{\beta} + \bar{g}_{\mu\nu,\alpha} f_{\hat{j}\hat{k}}^{\alpha} \right) e_{\hat{l}}^{\mu} e_{\hat{m}}^{\nu}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

En introduisant les relations (2.13), (2.18) et (2.35) dans l'équation (2.41), nous obtenons :

$$\boxed{\bar{g}_{\hat{l}\hat{m},\hat{j}\hat{k}} = \frac{1}{3}\bar{R}_{\hat{l}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} + \frac{1}{2} \left(\phi_{\hat{l}-\hat{m}\hat{j}\hat{k}} + \phi_{\hat{m}-\hat{l}\hat{j}\hat{k}} \right)}, \quad (2.42)$$

$$\text{où } \bar{R}_{\hat{l}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} = \bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta} e_{\hat{l}}^{\mu} e_{\hat{j}}^{\alpha} e_{\hat{m}}^{\nu} e_{\hat{k}}^{\beta} \text{ et } \phi_{\hat{l}-\hat{m}\hat{j}\hat{k}} = \phi_{\mu-\alpha\beta\theta} e_{\hat{l}}^{\mu} e_{\hat{m}}^{\alpha} e_{\hat{j}}^{\beta} e_{\hat{k}}^{\theta}.$$

La métrique La métrique dans le référentiel de Fermi se déduit des équations (2.24), (2.36), (2.39) et (2.42) :

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - 2\gamma_{\hat{j}} X^{\hat{j}} + \left(\Omega_{\hat{\alpha}\hat{j}} \Omega_{\hat{k}}^{\hat{\alpha}} + \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dT^2 \\ &+ \left[2\Omega_{\hat{m}\hat{j}} X^{\hat{j}} + \left(\frac{4}{3}\bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} + \phi_{\hat{0}-\hat{j}\hat{k}\hat{m}} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dX^{\hat{m}} dT \\ &+ \left[\eta_{\hat{l}\hat{m}} + \left(\frac{1}{3}\bar{R}_{\hat{l}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} + \phi_{\hat{l}-\hat{m}\hat{j}\hat{k}} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dX^{\hat{l}} dX^{\hat{m}} \end{aligned}}, \quad (2.43)$$

où $\phi_{\hat{\sigma}-\hat{m}\hat{j}\hat{k}} = \phi_{\mu-\alpha\beta\theta} e_{\hat{\sigma}}^{\mu} e_{\hat{m}}^{\alpha} e_{\hat{j}}^{\beta} e_{\hat{k}}^{\theta}$, et $\phi_{\mu-\alpha\beta\theta}$ est défini par la relation (2.40). Notons que :

$$\Omega_{\hat{\alpha}\hat{j}} \Omega_{\hat{k}}^{\hat{\alpha}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} = \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{X} \right)^2 - \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{X} \right)^2$$

Pour obtenir cette métrique, les seules hypothèses utilisées sont celles du référentiel propre, de la section 2.2.1. Nous les rappelons :

1. Sur la trajectoire de l'observateur, la coordonnée temporelle du référentiel de Fermi est égale au temps propre mesuré par l'observateur.
2. Sur la trajectoire de l'observateur, les dérivées spatiales de la partie spatiale de la métrique sont nulles.

Les parties croisée et spatiale de la métrique prennent des valeurs arbitraires, qui dépendent de la manière dont on choisit de prolonger les « lignes droites » du référentiel de Fermi. En revanche, il est très intéressant de noter que la partie temporelle de la métrique, jusqu'au deuxième ordre, ne dépend pas des fonctions arbitraires $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^{\mu}$. Les applications que nous étudierons dans la deuxième partie ne dépendent que de la partie non arbitraire de la métrique de Fermi. Pour la détection de l'effet Lense-Thirring, au chapitre 4, le résultat

dépend de la partie temporelle de la métrique jusqu'au deuxième ordre, et de la partie croisée au premier ordre (relation (4.15)). Pour la détection des OGs, nous n'aurons besoin que de la partie temporelle au deuxième ordre (voir par exemple la section 5.3.2 pour l'interférométrie, ou bien la relation (3.19) pour les cavités).

Il serait pratique d'annuler les termes du deuxième ordre, pour les parties spatiale et croisée, par un choix de la fonction $\phi_{\mu-\alpha\beta\theta}$. On peut montrer que cela est impossible. En effet, la partie symétrique sur $(\hat{j}\hat{m}\hat{k})$ du tenseur $R_{\hat{\alpha}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} + R_{\hat{\alpha}\hat{j}\hat{m}\hat{k}}$ est nulle.

Un changement de coordonnées quelconque vers des coordonnées de Fermi s'écrit au troisième ordre :

$$x^\mu = f^\mu + e_j^\mu X^j - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} e_j^\alpha e_k^\beta X^j X^k + \frac{1}{6} f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \mathcal{O}(X^4) ,$$

où $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu$ est une fonction arbitraire symétrique sur $(\hat{j}\hat{k}\hat{l})$.

2.2.3 Les coordonnées normales de Fermi

Dans cette section nous allons faire le lien entre les coordonnées de Fermi, définies dans la section précédente, et les coordonnées normales de Fermi, définies par [Manasse et Misner](#) [160]. Quelles que soient les coordonnées de Fermi choisies, d'après l'équation (2.27), les vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{j}}$ sont transportés parallèlement le long des « lignes droites » à l'ordre zéro en u , paramètre de la ligne droite Γ_ξ . Poursuivre au premier ordre le développement du transport parallèle des vecteurs $\mathbf{a}_{\hat{j}}$ le long de Γ_ξ pourrait permettre de fixer les fonctions $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu$, et de retrouver les coordonnées normales de Fermi. Il n'en est rien. Pour s'assurer que Γ_ξ est bien une géodésique spatiale, ce qui est nécessaire pour les coordonnées normales de Fermi, nous allons utiliser l'équation de la déviation des géodésiques. Pour cela, nous définissons une nouvelle ligne droite infiniment proche de Γ_ξ , appartenant à Σ_s , de vecteur tangent $(\xi + \delta\xi)$ en M :

$$\Gamma_{\xi+\delta\xi} : X^{\hat{j}} = (\xi^{\hat{j}} + \delta\xi^{\hat{j}}) u .$$

Nommons $\overset{0}{()}$ la valeur des fonctions prises le long de Γ_ξ . Le long de la ligne $\Gamma_{\xi+\delta\xi}$:

$$a_{\hat{l}}^\mu = \overset{0}{a_{\hat{l}}^\mu} + \left(f_{\hat{j}\hat{l}}^\mu u + f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu \xi^{\hat{k}} u^2 + \mathcal{O}(u^3) \right) \delta\xi^{\hat{j}} + \mathcal{O}(\delta\xi^2) , \quad (2.44)$$

où

$$\overset{0}{a_{\hat{l}}^\mu} = e_{\hat{l}}^\mu + f_{\hat{j}\hat{l}}^\mu \xi^{\hat{j}} u + \mathcal{O}(u^2) .$$

Dérivons l'équation (2.44) par rapport au paramètre u :

$$\frac{da_{\hat{l}}^\mu}{du} = \frac{da_{\hat{l}}^\mu}{du} + \left(f_{\hat{j}\hat{l}}^\mu + 2f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu \xi^{\hat{k}} u \right) \delta \xi^{\hat{j}} + \mathcal{O}(\delta \xi^2) . \quad (2.45)$$

De plus :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \left(\Gamma_{\alpha\beta,\theta}^\mu e_j^\theta u + \mathcal{O}(u^2) \right) \delta \xi^{\hat{j}} + \mathcal{O}(\delta \xi^2) , \quad (2.46)$$

où

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\theta}^\mu e_j^\theta \xi^{\hat{j}} u + \mathcal{O}(u^2) .$$

Finalement, en introduisant les relations (2.44), (2.45) et (2.46) dans l'équation du transport parallèle (2.26), et en soustrayant à l'expression obtenue l'équation (2.26) développée à l'ordre zéro en $\delta \xi$, nous obtenons :

$$f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu = \frac{1}{2} \left(2\bar{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\beta\theta}^\sigma + \bar{\Gamma}_{\beta\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\theta\alpha}^\sigma + \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\sigma - 2\bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\theta}^\mu \right) e_j^\theta e_k^\beta e_l^\alpha$$

En symétrisant cette expression sur les indices $\hat{j}\hat{k}\hat{l}$, nous obtenons alors l'expression de $f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu$ dans les coordonnées normales de Fermi :

$$\left[f_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^\mu \right]_{\text{CNF}} = \left(\frac{2}{3} \bar{\Gamma}_{\theta\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma - \frac{1}{3} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\theta}^\mu \right)_{(\alpha\beta\theta)} e_j^\theta e_k^\beta e_l^\alpha .$$

Nous déduisons de l'expression (2.40) que

$$[\phi_{\mu-\alpha\beta\theta}]_{\text{CNF}} = 0 .$$

Ainsi, la métrique écrite dans les coordonnées normales de Fermi est :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - 2\gamma_{\hat{j}} X^{\hat{j}} + \left(\Omega_{\hat{\alpha}\hat{j}} \Omega_{\hat{k}}^{\hat{\alpha}} + \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dT^2 \\ &+ \left[2\Omega_{\hat{m}\hat{j}} X^{\hat{j}} + \frac{4}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dX^{\hat{m}} dT \\ &+ \left[\eta_{\hat{l}\hat{m}} + \frac{1}{3} \bar{R}_{\hat{l}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \mathcal{O}(X^3) \right] dX^{\hat{l}} dX^{\hat{m}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ce résultat est en accord avec la métrique trouvée par [Ni et Zimmermann \[171\]](#). Ils calculent la métrique de façon très différente, en se plaçant dès le départ dans le référentiel de Fermi. Cela ne leur permet pas de trouver le changement de coordonnées (2.31). Nous obtenons avec notre méthode :

$$\begin{aligned}
x^\mu &= f^\mu + e_j^\mu X^j - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} e_j^\alpha e_{\hat{k}}^\beta X^j X^{\hat{k}} \\
&+ \left(\frac{1}{9} \bar{\Gamma}^\mu_{\theta\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{18} \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta,\theta} \right)_{(\alpha\beta\theta)} e_j^\theta e_{\hat{k}}^\beta e_{\hat{l}}^\alpha X^j X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \mathcal{O}(X^4) .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Dans un champ gravitationnel faible, les coefficients $\bar{\Gamma}^\mu_{\theta\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}$ sont du deuxième ordre vis-à-vis de la perturbation de la métrique. Nous retrouvons alors la relation calculée par [Ashby et Bertotti \[28\]](#).

2.3 L'approximation linéaire

Dans cette section nous reprenons les résultats précédents en les spécialisant au cas des champs gravitationnels faibles, pour lesquels les composantes de la métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta} , |k_{\alpha\beta}| \ll 1 , \tag{2.49}$$

où les $k_{\alpha\beta}$ sont les composantes de la perturbation de la métrique. Dans tous les calculs qui suivent, nous ne conserverons que les termes linéaires en $|k_{\alpha\beta}|$. C'est pourquoi ce formalisme est parfois appelé « théorie linéarisée de la gravité ». Il s'applique généralement bien aux expériences de gravitation expérimentale, que ce soit pour la modélisation du système solaire* ou des ondes gravitationnelles.

2.3.1 Changements de coordonnées

Les changements de coordonnées qui nous intéressent conservent la forme (2.49) pour les composantes de la métrique. Nous en distinguons deux types : les transformations de Poincaré (dans l'approximation des faibles vitesses) et les changements de coordonnées infinitésimaux.

Transformations de Poincaré Étant donné un système de coordonnées \mathbf{x} , nous définissons le système de coordonnées \mathbf{y} par les relations :

$$x^\mu = \Lambda_{\alpha'}^\mu y^{\alpha'} + c^{\mu'} \text{ avec } \Lambda_{\alpha'}^\mu \Lambda_{\beta'}^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'} ,$$

où $\Lambda_{\beta'}^\alpha$ et $c^{\mu'}$ sont des constantes. Les matrices de transformation s'écrivent alors

$$a_{\alpha'}^\mu = \Lambda_{\alpha'}^\mu$$

*Attention, la théorie linéarisée ne prédit pas correctement l'avance du périhélie de Mercure.

et les composantes de la perturbation métrique se transforment comme les composantes d'un champ de tenseurs de l'espace-temps de Minkowski :

$$K_{\alpha'\beta'}(y^{\sigma'}) = \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} k_{\mu\nu}(x^{\sigma}) .$$

Les $K_{\alpha'\beta'}$ sont les composantes de la perturbation métrique dans le repère naturel associé au système de coordonnées \mathbf{y} . Nous obtenons $|K_{\alpha'\beta'}| \ll 1$ seulement dans l'approximation des faibles vitesses (ie. $|v/c| \ll 1$).

Changement de coordonnées infinitésimal Étant donné un système de coordonnées \mathbf{x} , nous définissons le système de coordonnées \mathbf{y} par les relations :

$$x^{\mu} = y^{\mu'} + \epsilon^{\mu'}(y^{\sigma'}) , \quad (2.50)$$

Les fonctions $\epsilon^{\mu'}$ et leurs dérivées doivent avoir des valeurs assez faibles pour que $|K_{\mu'\nu'}| \ll 1$. Les matrices de transformations s'écrivent alors

$$a_{\alpha'}^{\mu} = \delta_{\alpha'}^{\mu} + \epsilon^{\mu'}_{,\alpha'} \quad (2.51)$$

et les composantes de la métrique s'obtiennent par les relations :

$$K_{\mu'\nu'}(y^{\sigma'}) = k_{\mu\nu}(y^{\sigma'}) + \epsilon_{\mu',\nu'}(y^{\sigma'}) + \epsilon_{\nu',\mu'}(y^{\sigma'}) , \quad (2.52)$$

où $\epsilon_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu'} \epsilon^{\nu'}$. Les relations (2.52) sont souvent appelées transformations de jauge, par analogie avec les transformations de jauge du champ électromagnétique. La valeur des matrices de transformation (2.51) nous donne alors les composantes du tenseur de Riemann dans le repère naturel associé aux nouvelles coordonnées :

$$R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \mathcal{O}(k^2) ,$$

où $k = \max|k_{\alpha\beta}|$. Cette égalité peut être interprétée comme l'invariance de jauge de la théorie linéarisée de la gravité. Je préfère l'interpréter simplement comme l'invariance des composantes du tenseur de Riemann par changement de coordonnées infinitésimal. Je pense que l'interprétation en terme de jauge est dangereuse en gravitation expérimentale, et cela pour plusieurs raisons.

La première et la plus évidente est que cette analogie est formelle, donc limitée. Toutes les propriétés de l'invariance de jauge électromagnétique ne sont pas transposables sans risquer de faire des erreurs. Un exemple convaincant est donné par [Stodolsky \[204\]](#).

Ensuite, le terme changement de jauge est ambigu. Il peut signifier un changement de la situation physique, ou bien un changement de coordonnées infinitésimal sans changement

de la situation physique. Cela est illustré par l'expérience proposée par Ph. [Tourenne](#) [212, p.198]. Elle montre que l'expérimentateur doit bien préciser le système de coordonnées dans lequel il met en œuvre son protocole expérimental. On l'appelle alors système de coordonnées opératoire. Un autre observateur, disposant d'un autre système de coordonnées opératoire, peut réaliser le même protocole expérimental : il obtiendra généralement des résultats différents car l'expérience ainsi réalisée n'est pas la même. En revanche, il peut changer le protocole expérimental de façon à réaliser la même expérience dans son système de coordonnées opératoire : il obtiendra alors les mêmes résultats que le premier observateur. Ainsi, du point de vue de l'expérience, le changement de jauge peut aussi bien définir une expérience différente qu'une description différente de la même expérience. Nous distinguons donc les changements de coordonnées actifs, décrivant une expérience différente, et les changements de coordonnées passifs, décrivant la même expérience dans un système de coordonnées différent.

Dans la deuxième partie, nous accorderons une grande importance à la définition de l'expérience en terme de protocole lié à un système de coordonnées opératoire, en définissant systématiquement ces deux aspects.

Les coordonnées normales de Fermi Dans l'approximation linéaire, le changement de coordonnées (2.48) depuis un système de coordonnées quelconque \mathbf{x} vers les coordonnées normales de Fermi \mathbf{X} s'écrit :

$$x^\mu = f^\mu + e^\mu_{\hat{j}} X^{\hat{j}} - \frac{1}{2} \left(k^\mu_{\hat{j}, \hat{m}} - \frac{1}{2} k_{\hat{m} \hat{j}}{}^{\mu} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{m}} - \frac{1}{6} \left(k^\mu_{\hat{l}, \hat{m} \hat{j}} - \frac{1}{2} k_{\hat{l} \hat{m}}{}^{\mu}{}_{\hat{j}} \right) X^{\hat{j}} X^{\hat{m}} X^{\hat{l}} + \mathcal{O}(X^4) . \quad (2.53)$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation, nous avons contracté les indices de la perturbation k avec ceux des tétrades ; par exemple $k^\mu_{\hat{j}, \hat{m}} = \eta^{\mu\nu} k_{\nu\alpha, \beta} e_{\hat{j}}^\alpha e_{\hat{m}}^\beta$. Le résultat (2.53) est en accord avec celui de [Marzlin](#) [161, éq.14]. Celui-ci calcule le changement de coordonnées à tous les ordres pour un champ gravitationnel faible :

$$\begin{aligned} x^\mu &= f^\mu + \left(e^\mu_{\hat{j}} + k^\mu_{\hat{j}} \right) X^{\hat{j}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} k^\mu_{\hat{m}, \hat{j}_1 \dots \hat{j}_l} X^{\hat{m}} X^{\hat{j}_1} \dots X^{\hat{j}_l} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+2)!} k_{\hat{m} \hat{n}}{}^{\mu}{}_{\hat{j}_1 \dots \hat{j}_l} X^{\hat{m}} X^{\hat{n}} X^{\hat{j}_1} \dots X^{\hat{j}_l} . \end{aligned}$$

Séparons la tétrade en une partie non perturbée et une partie perturbée :

$$e^\mu_{\hat{\alpha}} = e^\mu_{\hat{\alpha}}{}^0 + \mathcal{O}(k) .$$

D'après la définition (2.10) de la tétrade et l'approximation linéaire (2.49), nous pouvons toujours choisir $e_{\hat{\alpha}}^{\mu} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\mu}$, où Λ est une transformation de Poincaré. Alors le changement de coordonnées (2.53) se réécrit :

$$x^{\mu} = \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\mu} X^{\hat{\alpha}} + \mathcal{O}(k) ,$$

où l'origine des temps est choisie telle que $f^{\mu}(0) = 0$. C'est une transformation de Poincaré suivie d'un changement de coordonnées infinitésimal.

2.3.2 La métrique post-newtonienne paramétrée (PPN)

Nous rappelons que dans ce chapitre nous utilisons des unités géométriques $c = G = 1^*$. Nous voulons écrire la métrique post-newtonienne d'un corps en rotation uniforme, isolé et axisymétrique. Pour cela nous utilisons le formalisme de Will-Nordtvedt contenant les dix paramètres $\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \dots, \zeta_4$ [238, 239]. \vec{v}_r est la vitesse du centre de gravité du corps central par rapport à un référentiel privilégié au repos, s'il en existe un. Nous nous plaçons dans un référentiel géocentrique non tournant, considéré comme un référentiel local, dont le système de coordonnées est \vec{x} . Ce cas a été étudié rigoureusement par Linet et Teyssandier [156]. La métrique est stationnaire et elle s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}) &= 1 - 2W(\vec{x}) + \tilde{O}_4 \\ -\vec{g}(\vec{x}) \equiv \{g_{0j}(\vec{x})\} &= 2 \left(1 + \gamma + \frac{\alpha_1}{4}\right) \vec{W}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\alpha_1 W(\vec{x}) \vec{v}_r + \tilde{O}_5 \\ g_{ij}(\vec{x}) &= -\delta_{ij} (1 + 2\gamma W(\vec{x})) + \tilde{O}_4 , \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec

$$W(\vec{x}) = \frac{M}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \quad (2.55)$$

$$\vec{W}(\vec{x}) = \frac{I\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{2r^3} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P'_{n+1}(\cos \theta) \right] , \quad (2.56)$$

où $r = \|\vec{x}\|$, θ est l'angle entre \vec{x} et l'axe de rotation du corps, $\vec{\omega}$ est sa vitesse angulaire, supposée constante, R est son rayon équatorial, les P_n sont les polynômes de Legendre, et les coefficients $M, J_2, \dots, J_n, \dots$ et $I, K_1, \dots, K_n, \dots$ sont les moments multipolaires de la décomposition des potentiels W et \vec{W} , dont on suppose la convergence. Le moment angulaire du corps central est $\vec{J} = I\vec{\omega}$. L'ordre du développement de la métrique[†] est

*Voir le formulaire p. pour rétablir les dimensions usuelles.

[†]Nous faisons un petit abus de notation pratique : le terme \tilde{O}_n , lorsqu'il se situe à la fin d'une somme, signifie $\mathcal{O}(\tilde{O}_n)$.

$$\boxed{\tilde{O}_n = \left(\frac{M}{r}\right)^{n/2}}. \quad (2.57)$$

Nous obtenons donc $W \sim \tilde{O}_2$ et $\|\vec{W}\| \sim \tilde{O}_4 \cdot \|\vec{J}\|/M^2$. Considérons un satellite en chute libre tournant autour du corps central sur une orbite quasi-circulaire de rayon $r \sim R/\kappa$, avec $\kappa \leq 1$. Le centre de masse du satellite est repéré par le point M . Nous paramétrons sa trajectoire dans les coordonnées géocentriques par son temps propre : $x^\alpha = f^\alpha(s)$. Nous supposons que sa vitesse newtonienne vérifie : $v = \|\vec{v}\| = \|\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t\| \sim \tilde{O}_1$; de plus $v^k = u^k/u^0$, où $u^\alpha = \mathrm{d}f^\alpha/\mathrm{d}s$ est la quadri-vitesse du satellite. [Misner *et al.* \[169, p.1087\]](#) nous donne une tétrade au point M , de paramètre s :

$$\begin{aligned} e_0^0(s) &= 1 + \bar{W} + \frac{v^2(s)}{2} + \tilde{O}_4 \\ e_0^i(s) &= v^i(s) \left(1 + \bar{W} + \frac{v^2(s)}{2}\right) + \tilde{O}_5 \\ e_j^0(s) &= v^j \left(1 + \bar{W}(2 + \gamma) + \frac{v^2(s)}{2}\right) - \bar{g}_{0j} + \tilde{O}_5 \\ e_j^i(s) &= \delta_{ij} (1 - \gamma \bar{W}) + \frac{1}{2} v^i(s) v^j(s) + \tilde{O}_4, \end{aligned} \quad (2.58)$$

où $\bar{W} = W(\vec{f}(s))$ et $\bar{g}_{0j} = g_{0j}(\vec{f}(s))$. Il faut noter que $(e_{\hat{\alpha}})$ est une « vraie » tétrade, ie. $\bar{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \bar{g}_{\mu\nu} e_{\hat{\alpha}}^\mu e_{\hat{\beta}}^\nu = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, où $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ sont les composantes de la métrique dans les coordonnées de Fermi. Nous ne donnons son développement qu'à l'ordre 3 pour les parties temporelle et spatiale, et à l'ordre 4 pour la partie croisée, car cela est suffisant pour la suite. C'est bien une tétrade car nous vérifions par le calcul que :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\hat{0}\hat{0}} - 1 &= C(\tilde{O}_4) \\ \bar{G}_{\hat{0}\hat{j}} &= C(\tilde{O}_5) \\ \bar{G}_{\hat{i}\hat{j}} + \delta_{ij} &= C(\tilde{O}_4), \end{aligned}$$

où $C(\tilde{O}_4)$ et $C(\tilde{O}_5)$ sont des combinaisons quelconques de termes d'ordres supérieurs ou égaux respectivement à 4 et 5. Nous pouvons donc choisir les termes non écrits dans la tétrade de façon à annuler ces combinaisons.

Dynamique de la tétrade Nous pouvons calculer l'accélération* $\vec{\gamma}$ et la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_0$ de la tétrade, mesurées par un accéléromètre et des gyroscopes, grâce à la formule (2.23).

*Attention à ne pas confondre l'accélération $\vec{\gamma}$ avec γ , le paramètre du formalisme PPN.

Ces notions sont définies dans la section 2.2.1. Nous supposons que l'accélération du satellite est telle que : $\|\vec{\gamma}\| \lesssim \tilde{O}_2/r$. Nous obtenons :

$$\gamma^j = \Omega_{\hat{0}\hat{j}} = a^j - W_{,j} + \frac{\tilde{O}_3}{r} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\hat{j}\hat{k}} &= (1 + \gamma) \left(v^k W_{,j} - v^j W_{,k} \right) + \left(1 + \gamma + \frac{\alpha_1}{4} \right) \left(W^j_{,k} - W^k_{,j} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_1}{4} \left(v_r^j W_{,k} - v_r^k W_{,j} \right) + \frac{1}{2} \left(v^j a^k - v^k a^j \right) + \frac{\tilde{O}_4}{r} , \end{aligned} \quad (2.60)$$

où $a^j = dv^j/dt$ est l'accélération newtonienne du centre de masse du satellite.

De plus, la définition (2.29) nous apprend que

$$\Omega_0^i = \frac{1}{2} \epsilon^{j\hat{k}\hat{i}} \Omega_{\hat{j}\hat{k}} . \quad (2.61)$$

D'après les relations (2.59), (2.60) et (2.61), nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{\text{LT}} + \vec{\Omega}_{\text{dS}} + \vec{\Omega}_{\text{Th}} + \frac{\tilde{O}_4}{r}} , \quad (2.62)$$

où

$$\vec{\Omega}_{\text{LT}} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{g} = - \left(1 + \gamma + \frac{\alpha_1}{4} \right) \vec{\nabla} \wedge \vec{W} - \frac{\alpha_1}{4} \vec{\nabla} W \wedge \vec{v}_r \quad (2.63)$$

$$\vec{\Omega}_{\text{dS}} = \left(\frac{1}{2} + \gamma \right) \vec{\nabla} W \wedge \vec{v} \quad (2.64)$$

$$\vec{\Omega}_{\text{Th}} = \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \vec{\gamma} . \quad (2.65)$$

Nous rappelons que $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\nabla} W + \tilde{O}_3/r$ est l'accélération physique du satellite, mesurable par des accéléromètres. $\vec{\Omega}_{\text{LT}}$, $\vec{\Omega}_{\text{dS}}$ et $\vec{\Omega}_{\text{Th}}$ sont respectivement les termes de Lense-Thirring, de de Sitter et de Thomas. En ne prenant en compte que le terme monopolaire du développement de \vec{W} , la vitesse angulaire due à l'effet Lense-Thirring est :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{\text{LT}} = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \frac{\alpha_1}{4} \right) \left(\frac{\vec{J}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{J} \cdot \vec{n}) \vec{n}}{r^3} \right) - \frac{\alpha_1}{4} \vec{\nabla} W \wedge \vec{v}_r} , \quad (2.66)$$

où $\vec{n} = \vec{r}/r$. En négligeant les effets de référentiel privilégié ($\alpha_1 = 0$), nous retrouvons les résultats classiques pour les trois vitesses angulaires, obtenus par exemple dans le livre de Misner *et al.* [169, pp.1118-9].

Calcul de la métrique Calculons maintenant la métrique dans les coordonnées normales de Fermi. Soit \mathbf{X} le système de coordonnées normales de Fermi associé en M à la tétrade $(\mathbf{e}_{\hat{\alpha}})$. Nous introduisons un nouveau paramètre ϵ qui rend compte de la taille d de l'expérience à l'intérieur du satellite : $d/R = \epsilon O_1$, où $O_1 = \tilde{O}_1 \sqrt{\kappa}$ et $\epsilon \leq 1$. L'approximation de Fermi est donc reliée à l'approximation post-newtonienne ; cela se traduit par la condition $|X^{\hat{k}}| \lesssim d = R\epsilon O_1$.

Pour prendre en compte l'effet Lense-Thirring, la métrique doit être développée au moins au troisième ordre en $X^{\hat{k}}$. D'après la formule (2.47) et Marzlin [161, eq.16] :

$$\begin{aligned} G_{\hat{0}\hat{0}} = 1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{X}\right)^2 - \left(\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X}\right)^2 + \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \frac{1}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k},\hat{l}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} \\ + \frac{4}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{X}) + \frac{4}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{l}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} (\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X})^{\hat{l}} + \dots \end{aligned} \quad (2.67)$$

D'après la métrique (2.54), $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}$ avec $|k_{\alpha\beta}| \lesssim \tilde{O}_2$, ce qui implique $|\bar{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\mu}\hat{\nu}}| \lesssim \tilde{O}_2/r^2$. Comme nous avons supposé que $\|\vec{\gamma}\| \lesssim \kappa^2 O_2/R$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{X}\right)^2 &\lesssim \kappa^4 \epsilon^2 O_6 \\ \left|\bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{X})\right| &\lesssim \kappa^5 \epsilon^3 O_7 . \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = 1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \frac{1}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k},\hat{l}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \kappa^4 \epsilon^2 O_6 . \quad (2.68)$$

Avec les mêmes approximations, nous pouvons écrire :

$$G_{\hat{0}\hat{m}} = -\left\{\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X}\right\}^{\hat{m}} + \frac{2}{3} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \frac{1}{4} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{m}\hat{k},\hat{l}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \kappa^4 \epsilon^2 O_6 \quad (2.69)$$

$$G_{\hat{n}\hat{m}} = -\delta_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{3} \bar{R}_{\hat{n}\hat{j}\hat{m}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \frac{1}{6} \bar{R}_{\hat{n}\hat{j}\hat{m}\hat{k},\hat{l}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \kappa^4 \epsilon^2 O_6 . \quad (2.70)$$

Nous utiliserons cette métrique pour calculer la grandeur de l'effet Lense-Thirring dans la différence de phase d'un interféromètre à onde de matière au chapitre 4. Nous n'aurons pas besoin de $G_{\hat{0}\hat{m}}$ et de $G_{\hat{n}\hat{m}}$ à un ordre aussi élevé. En calculant le tenseur de courbure, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
G_{\hat{0}\hat{0}} &= 1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} - W_{,jk} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} - \frac{1}{3} W_{,jkl} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + \kappa^4 \epsilon^2 O_6 \\
G_{\hat{0}\hat{m}} &= - \left\{ \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X} \right\}^{\hat{m}} + \kappa^{7/2} \epsilon^2 O_5 \\
G_{\hat{n}\hat{m}} &= -\delta_{\hat{n}\hat{m}} + \kappa^3 \epsilon^2 O_4
\end{aligned} \quad (2.71)$$

2.3.3 Les ondes gravitationnelles

Dans l'approximation linéaire, les équations d'Einstein dans le vide s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\tau} (k_{\sigma\tau,\mu\nu} + k_{\mu\nu,\sigma\tau} - k_{\sigma\nu,\mu\tau} - k_{\mu\tau,\sigma\nu}) = 0 ,$$

où $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$ est le tenseur de Ricci. Ces équations sont indépendantes d'un changement de coordonnées infinitésimal de la forme (2.50). Nous choisissons de les écrire dans un système de coordonnées harmoniques, pour lequel $\partial_\nu (k_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu k_\alpha^\alpha) = 0^*$. Les équations d'Einstein dans le vide s'écrivent alors :

$$\square k_{\mu\nu} = 0 .$$

La condition harmonique ne fixe pas uniquement le système de coordonnées car nous pouvons encore faire une transformation de coordonnées infinitésimale avec des fonctions $\epsilon_{\mu'}$ satisfaisant $\square \epsilon_{\mu'} = 0$.

Coordonnées d'Einstein Pour définir un système de coordonnées unique, des conditions supplémentaires sur $k_{\mu\nu}$ sont nécessaires. La forme la plus simple de la perturbation est obtenue pour $\partial_i k_j^i = 0$ et $k_i^i = 0$. Nous appelons système de coordonnées d'Einstein le système \mathbf{x} vérifiant ces conditions[†], et $h_{\mu\nu}^E$ la perturbation gravitationnelle écrite dans ce système de coordonnées. Dans toute la suite du manuscrit nous donnerons les résultats pour une onde gravitationnelle se propageant selon l'axe $x^3 \equiv z$. Les seules composantes non nulles de $h_{\mu\nu}^E$ sont alors $h_{rs}^E = h_{rs}^E(x^0 - x^3)$, avec $r, s = 1$ ou 2 . La métrique s'écrit :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{rs}^E dx^r dx^s . \quad (2.72)$$

Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, comme jusqu'à la fin de cette section, nous oublions l'indice E pour ne pas alourdir les notations. Dans la limite des faibles vitesses, ie. $v \ll 1$, les coordonnées spatiales d'un point matériel en chute libre satisfont les équations :

*C'est la linéarisation de la condition $\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$ définissant les coordonnées harmoniques.

†On l'appelle généralement système de coordonnées transverse sans trace (TT).

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{dh_j^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \mathcal{O}(v^2 h) , \quad (2.73)$$

où $h = \max|h_{\alpha\beta}|$. Ainsi un point matériel initialement au repos reste au repos lors du passage de l'onde gravitationnelle, ie. ses coordonnées spatiales d'Einstein sont constantes.

Les coordonnées de Fermi Le centre de masse M de l'appareil de mesure, ou *apparatus*, a une trajectoire $x^\alpha = f^\alpha(s)$. Il a une vitesse newtonienne $v^k = u^k/u^0$. Comme pour la métrique PPN, nous relient l'approximation champ faible et l'approximation des faibles vitesses : nous posons $O_4 = h$ et $|v^k| \sim O_1$. Les composantes de $e_{\hat{0}}$ sont données par la quadri-vitesse de l'*apparatus* :

$$e_{\hat{0}}^0 = u^0 = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + O_6 \quad (2.74)$$

$$e_{\hat{0}}^k = u^k = v^k \left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 \right) + O_7 . \quad (2.75)$$

Les composantes du repère spatial se calculent à partir des relations (2.10) définissant une tétrade. Nous trouvons :

$$e_{\hat{n}}^0 = v^n \left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 \right) - \frac{1}{2}\bar{h}_{jn}v^j + O_7 \quad (2.76)$$

$$e_{\hat{n}}^j = \delta_{\hat{n}}^j - \frac{1}{2}\bar{h}_{\hat{n}}^j + \frac{1}{2}v^j v^n \left(1 + \frac{3}{4}v^2 \right) + O_6 , \quad (2.77)$$

où $\bar{h}_{\hat{n}}^j(s) = -\bar{h}_{jn}(s) \equiv -h_{jn}(f^0(s) - f^3(s))$. Nous vérifions bien que :

$$\bar{G}_{\hat{0}\hat{0}} - 1 = C(O_6)$$

$$\bar{G}_{\hat{0}\hat{j}} = C(O_7)$$

$$\bar{G}_{\hat{i}\hat{j}} + \delta_{ij} = C(O_6) ,$$

où $C(O_6)$ et $C(O_7)$ sont des combinaisons quelconques de termes d'ordres supérieurs ou égaux respectivement à 6 et 7, que l'on peut annuler en choisissant bien les termes non écrits dans la tétrade.

Dynamique de la tétrade L'accélération et la vitesse angulaire de la tétrade se calculent avec la formule (2.23). Nous supposons que l'accélération du satellite est telle que : $\|\vec{\gamma}\| \lesssim O_2/\Lambda$, où Λ est la longueur d'onde de l'onde gravitationnelle. Alors :

$$\gamma^{\hat{j}} = \Omega_{\hat{0}\hat{j}} = a^j + \frac{1}{2} \left(\vec{v} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{O_5}{\Lambda} \quad (2.78)$$

$$\Omega_{\hat{j}\hat{k}} = \frac{1}{2} (\bar{h}_{ij,k} - \bar{h}_{ik,j}) v^i + \frac{1}{2} (v^j a^k - v^k a^j) \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{O_6}{\Lambda}, \quad (2.79)$$

où $\bar{h}_{ij,k}(s) = h_{ij,k}(f^0(s) - f^3(s))$. Nous obtenons alors :

$$\boxed{\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{\text{Th}} + \vec{\Omega}_{\text{OG}} + \frac{O_6}{\Lambda}}, \quad (2.80)$$

où

$$\vec{\Omega}_{\text{Th}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \wedge \vec{\gamma} \quad (2.81)$$

$$\vec{\Omega}_{\text{OG}} = -\vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{h} \right) \quad (2.82)$$

$\vec{\Omega}_{\text{Th}}$ est la précession de Thomas, avec une correction relativiste d'ordre 5, et $\vec{\Omega}_{\text{OG}}$ résulte du couplage entre l'onde gravitationnelle et la vitesse de l'*apparatus*. Ce terme est similaire à celui de de Sitter pour la métrique PPN (Sec. 2.3.2). Vu la valeur très faible ($< 10^{-19}$) de l'amplitude de la perturbation métrique, on a peu de chance de pouvoir le mesurer un jour.

Calcul de la métrique Nous calculons la métrique dans les coordonnées normales de Fermi. Soit \mathbf{X} le système de coordonnées normales de Fermi associé en M à la tétrade ($\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$). Nous introduisons le paramètre ϵ qui rend compte de la taille d de l'*apparatus* : $d/\Lambda = \epsilon O_1$, où $\epsilon \leq 1$. L'approximation de Fermi est alors reliée à l'approximation champ faible ; cela se traduit par la condition $|X^{\hat{k}}| \lesssim d = \Lambda \epsilon O_1$.

D'après l'expression de la tétrade :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\hat{0}\hat{j}\hat{0}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} &= \bar{R}_{0j0k} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \epsilon^2 O_7 \\ &= \frac{1}{2} \bar{h}_{jk,00} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + \epsilon^2 O_7. \end{aligned} \quad (2.83)$$

D'après les formules (2.67), (2.69) et (2.70), les composantes du tenseur métrique sont :

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = 1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{X}\right)^2 + \frac{1}{2}\bar{h}_{jk,00}X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} + \epsilon^2 O_7 \quad (2.84)$$

$$G_{\hat{0}\hat{m}} = -\left\{\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X}\right\}^{\hat{m}} + \frac{1}{3}(\bar{h}_{jk,0m} - \bar{h}_{jm,0k})X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} + \epsilon^2 O_7 \quad (2.85)$$

$$G_{\hat{n}\hat{m}} = -\delta_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{6}(\bar{h}_{nm,jk} + \bar{h}_{jk,nm} - \bar{h}_{jm,kn} - \bar{h}_{kn,jm})X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} + \epsilon^2 O_7. \quad (2.86)$$

La métrique s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{X}\right)^2 + \frac{1}{2}\ddot{h}_{rs}X^{\hat{r}}X^{\hat{s}}\right) dT^2 \\ & - \left(\left(\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X}\right) \cdot d\vec{X} + \frac{2}{3}\ddot{h}_{rs}X^{\hat{r}}(X^{\hat{s}}dZ - ZdX^{\hat{s}})\right) dT \\ & + \frac{1}{6}\ddot{h}_{rs}(Z^2dX^{\hat{r}}dX^{\hat{s}} + X^{\hat{r}}X^{\hat{s}}dZ^2 - 2ZX^{\hat{s}}dZdX^{\hat{r}}) \end{aligned}} \quad (2.87)$$

où $T \equiv X^{\hat{0}}$ et $Z \equiv X^{\hat{3}}$, $r, s = 1, 2$ et $\ddot{h}_{rs} = \bar{h}_{rs,00}(s)$.

Changement de coordonnées Pour trouver la métrique nous aurions pu calculer le changement de coordonnées grâce à la formule (2.53). C'est ce que nous allons faire maintenant, pour deux raisons. D'une part, cela nous permettra de vérifier le résultat (2.87) par une autre méthode; d'autre part, nous verrons dans la deuxième partie du manuscrit que le changement de coordonnées peut être utile pour spécifier un protocole expérimental. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x^a &= f^a + e_j^a X^{\hat{j}} + \frac{1}{4}\dot{h}_{rs}e_j^r e_k^s X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} + \frac{1}{12}\ddot{h}_{rs}(e_i^0 - e_i^3)e_j^r e_k^s X^{\hat{j}}X^{\hat{k}}X^{\hat{l}} \\ x^r &= f^r + e_j^r X^{\hat{j}} - \frac{1}{2}\dot{h}_s^r e_j^s (e_k^0 - e_k^3)X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} - \frac{1}{6}\ddot{h}_s^r e_j^s (e_k^0 - e_k^3)(e_l^0 - e_l^3)X^{\hat{j}}X^{\hat{k}}X^{\hat{l}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

où $\dot{h}_{rs}(s) = \bar{h}_{rs,0}(s)$, $a = 0, 3$, $r, s = 1, 2$ et la tétrade $(e_{\hat{a}})$ est donnée par les formules (2.74-2.77). La métrique est plus simple à calculer dans le cas d'un observateur dont la vitesse et l'accélération sont nulles. Dans ce cas le changement de coordonnées s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} x^a &= f^a + \delta_3^a Z + \frac{1}{4}\dot{h}_{jk}X^{\hat{j}}X^{\hat{k}} - \frac{1}{12}\ddot{h}_{jk}X^{\hat{j}}X^{\hat{k}}Z \\ x^r &= f^r + X^{\hat{r}} - \frac{1}{2}\bar{h}_s^r X^{\hat{s}} + \frac{1}{2}\dot{h}_s^r X^{\hat{s}}Z - \frac{1}{6}\ddot{h}_s^r X^{\hat{s}}Z^2 \end{aligned}} \quad (2.89)$$

Nous pouvons calculer la métrique en utilisant la formule $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. Il faut bien noter que :

$$\begin{aligned} h_{rs}(t-z) &= h_{rs}(f^0(s) - f^3(s) - Z) \\ &= \bar{h}_{rs}(s) - \dot{h}_{rs}(s)Z + \frac{1}{2}\ddot{h}_{rs}(s)Z^2 + \dots \end{aligned}$$

Nous trouvons alors :

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}dX^{\hat{\alpha}}dX^{\hat{\beta}} + \frac{1}{2}\ddot{h}_{rs}X^{\hat{r}}X^{\hat{s}}\left(dT^2 + \frac{1}{3}dZ^2 - \frac{4}{3}dTdZ\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\ddot{h}_{rs}ZdX^{\hat{r}}\left(2X^{\hat{s}}dT - X^{\hat{s}}dZ + \frac{1}{2}ZdX^{\hat{s}}\right) \end{aligned}} \quad (2.90)$$

Nous trouvons bien le même résultat que précédemment, ie. la formule (2.87) avec $\|\vec{v}\| = \|\vec{\gamma}\| = 0$. De plus ce résultat est en accord avec celui de Fortini et Gualdi [114], qui calculent cette métrique à tous les ordres en $X^{\hat{j}}$.

L'ÉQUATION DE KLEIN-GORDON ET SES DIFFÉRENTES UTILISATIONS

SOMMAIRE

3.1	UNE ÉQUATION D'ONDE RELATIVISTE	71
3.1.1	Les origines de l'équation	71
3.1.2	Généralisation de l'équation de Klein-Gordon	72
3.2	LA PHASE PERTURBÉE	73
3.2.1	L'équation eikonale	73
3.2.2	La perturbation de la phase en champ faible	74
3.2.3	Interprétation des différents termes	75
3.3	LA LIMITE NON RELATIVISTE	78
3.3.1	L'équation de Schrödinger en champ faible	78
3.3.2	Quelques applications	80

POUR traiter des expériences d'interférométrie ou bien de piégeage d'ondes de matière, il est nécessaire d'avoir une équation d'onde qui régit leurs évolutions. L'équation de Klein-Gordon a été choisie pour ce travail de thèse. D'abord nous décrivons les motivations qui ont conduit à la « découverte » de cette équation, puis les conditions et les limites de son utilisation. Nous la généralisons par couplage minimal et faisons le lien avec la mécanique hamiltonienne.

La deuxième section décrit l'évolution de la phase d'une onde dans un champ gravitationnel faible. Nous décrivons la méthode utilisée pour calculer la perturbation de la phase qui en résulte. Nous l'appliquerons aux interféromètres dans les chapitres 4 et 5 de la seconde partie. Enfin nous interprétons les différents termes dus à la perturbation.

Dans la dernière section nous trouvons une équation de Schrödinger généralisée, dans l'approximation non relativiste. Nous l'appliquons aux métriques PPN et aux ondes gravitationnelles. Cette équation nous servira dans le chapitre 6 pour décrire la réponse des cavités à ondes de matière à une onde gravitationnelle.

3.1 Une équation d'onde relativiste

3.1.1 Les origines de l'équation

D'après Kragh [144], l'origine de l'équation de Klein-Gordon remonte à la fin de l'année 1925, où elle a été dérivée pour la première fois par Schrödinger. Celui-ci n'a pas publié ses travaux, mais il mentionne dans son premier article sur la mécanique ondulatoire publié en janvier 1926 qu'il l'a résolue, et qu'elle ne reproduit pas la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène [193]. Il en donne une dérivation dans son quatrième et dernier article sur la mécanique ondulatoire publié en juin 1926 [194]. Il part de l'équation relativiste de Hamilton-Jacobi d'un électron en présence d'un champ électromagnétique et applique les prescriptions $\partial H/\partial t \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$ et $\partial H/\partial q_k \rightarrow i\hbar\partial/\partial q_k$, où H est la fonction de Hamilton. Il obtient alors une équation de Klein-Gordon généralisée. En supposant qu'il n'y a pas de champ électromagnétique, l'équation d'onde devient :

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0, \quad (3.1)$$

où* $\square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$. Un mois plus tard, de Broglie [87] obtient la même équation que Schrödinger d'une manière un peu différente. Il part de l'équation de l'énergie relativiste d'un point matériel : $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, où $p = \|\vec{p}\|$ est l'impulsion de la particule et m_0 sa masse au repos. Puis il substitue les opérateurs $i\hbar\partial/\partial t$ et $-i\hbar\partial/\partial q_k$ à E et p_k . Il retrouve alors l'équation (3.1).

D'autres physiciens ont obtenu une équation similaire au cours de 1926, comme Pauli[†] et Fock [110]. Klein n'a revendiqué la paternité de cette équation que quarante ans plus tard [1]. Selon lui il l'a obtenue dans le courant de l'été 1925, mais il ne la considérait pas comme d'une grande importance dans son travail. Selon Kragh [144], en l'absence de lettres ou de notes, la question de la priorité de Klein ne peut pas être tranchée. Enfin, la contribution de Gordon est une application de l'équation à l'effet Compton [123]. C'est Schrödinger qui associe le nom de Gordon à l'équation, avec le souci de la distinguer par rapport à celle qui porte son nom, dans un article traitant de l'effet Compton [195]. Pauli[‡] préfère l'appeler : « the equation with the many fathers ». L'histoire a finalement retenu le nom de Klein et de Gordon.

On a su dès sa publication que l'équation de Klein-Gordon ne s'appliquait pas à l'électron, qui a un spin 1/2. C'est pourquoi Pauli et Dirac cherchèrent une autre équation relativiste. Cela a débouché sur la publication par Dirac de l'équation qui porte son nom. Il fut prouvé seulement plus tard, avec la découverte du méson en 1947, que l'équation de Klein-Gordon

*Attention nous avons choisi $\eta = \{1, -1, -1, -1\}$

[†]Lettre de Pauli à Jordan du 12 avril 1926.

[‡]Dans une lettre à Schrödinger de novembre 1926.

s'appliquait aux particules de spin nul. Par la suite, nous décrirons les atomes comme des champs scalaires de masse m qui obéissent à l'équation de Klein-Gordon ; cela revient à négliger les effets du spin. Cela simplifie grandement les calculs, car nous n'aurons pas à introduire de spineurs. De même, nous considérerons les photons comme des particules scalaires obéissant à l'équation de Klein-Gordon, avec $m = 0$: nous négligerons alors la polarisation de la lumière. Pour un cadre théorique prenant en compte le spin de la particule on peut se référer aux travaux de Ch. Bordé [49, 50, 52, 53]. Wajima *et al.* [229] étudient l'effet du spin sur la différence de phase d'un interféromètre atomique, dans le cas d'une métrique PPN. Le rapport de ces effets à ceux du moment angulaire orbital sont de l'ordre de λ_a/L , où λ_a est la longueur d'onde de De Broglie de l'atome et L la taille de l'interféromètre. Nous pouvons donc légitimement négliger ces corrections dans ce cas.

3.1.2 Généralisation de l'équation de Klein-Gordon

Nous avons vu dans la section 2.1.2 que le couplage minimal, qui découle directement de l'application du principe d'équivalence d'Einstein, permet de généraliser les lois de la relativité restreinte. Il faut substituer la dérivée covariante ∇_α à la dérivée partielle ordinaire ∂_α , et la métrique $g_{\alpha\beta}$ de l'espace-temps considéré à la métrique $\eta_{\alpha\beta}$ de la relativité restreinte. L'équation (3.1) se généralise donc en

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0, \quad (3.2)$$

où $\square\Psi = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Psi$. Bien que $\nabla_\alpha\nabla_\beta\Psi \neq \nabla_\beta\nabla_\alpha\Psi$, cette généralisation est sans ambiguïté, car la métrique $g_{\alpha\beta}$ est symétrique. Nous calculons :

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha \left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Psi_{,\beta} \right),$$

où g est le déterminant de la métrique. Si nous n'avions pas utilisé la règle du couplage minimal, nous aurions pu écrire une généralisation sous la forme $\left[\square + aR + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0$, où a est une constante et R est le scalaire de courbure. En effet, à la limite où $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, il vient $\square \rightarrow \square_0$ et $R \rightarrow 0$, ce qui conduit à l'équation (3.1). Le cas $a = 1/6$ est appelé couplage conforme, car l'équation d'onde est alors invariante par une transformation conforme de la métrique. Cependant, une telle généralisation avec $a \neq 0$ ne satisfait pas le principe d'équivalence d'Einstein. En effet, R étant un scalaire, il ne s'annule pas par le choix d'un système de coordonnées : nous ne retrouvons pas l'équation (3.1) dans un référentiel local*.

L'équation (3.2) est très utile car elle décrit aussi bien une particule de masse m soumise

*Plus généralement, un tenseur dont les composantes sont nulles dans un référentiel local est nul quel que soit le référentiel.

à un champ gravitationnel décrit par $g_{\alpha\beta}$ qu'une onde lumineuse (avec $m = 0$). En revanche elle ne décrit ni le spin de la particule ni la polarisation de l'onde lumineuse.

3.2 La phase perturbée

3.2.1 L'équation eikonale

Pour résoudre l'équation d'onde (3.2), nous supposons que la fonction d'onde Ψ est complexe. Nous nommons A l'amplitude et ϕ la phase de la fonction d'onde :

$$\Psi(x^\alpha) = A(x^\alpha)e^{i\phi(x^\alpha)} .$$

Nous obtenons $\nabla_\alpha \Psi = (\partial_\alpha A + iA\phi_{,\alpha})e^{i\phi}$. Nous supposons que la variation de la phase avec n'importe laquelle des coordonnées est de l'ordre de son nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde*, ie. $\phi_{,\alpha} \sim k$. De plus, nous supposons que la variation de l'amplitude dans un intervalle d'une longueur d'onde est négligeable devant sa valeur moyenne sur cet intervalle, ie. $|\partial_\alpha A| \ll |kA|$. Alors $\nabla_\alpha \Psi = i\phi_{,\alpha} \Psi$. Nous en déduisons que :

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \Psi = (i\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) \Psi .$$

L'équation de Klein-Gordon (3.2) équivaut alors au système

$$g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \quad (3.3)$$

$$\square\phi = 0 \quad (3.4)$$

Cette approximation est similaire à celle de l'optique géométrique. L'équation (3.3) est une généralisation de l'équation eikonale en optique.

Description corpusculaire Nous allons faire le lien avec la description hamiltonienne d'une particule. La correspondance fondamentale entre la description ondulatoire et corpusculaire d'une particule est la correspondance entre son action S et sa phase ϕ :

$$\phi(x^\alpha) = \frac{S(x^\alpha)}{\hbar}$$

Or, en mécanique hamiltonienne, l'action est liée à la quadri-impulsion p^α de la particule : $p_\alpha = S_{,\alpha}$. L'équation eikonale équivaut alors à :

*Pour une onde de matière, c'est la longueur d'onde de de Broglie : $\lambda_a = h/p$, où h est la constante de Planck et p l'impulsion de la particule.

$$g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = (mc)^2 \quad (3.5)$$

En définissant $x^\mu = x^\mu(s)$ la trajectoire du centre du paquet d'onde, nous obtenons $p^\alpha/m = u^\alpha = dx^\alpha/ds$. En dérivant de façon covariante la relation (3.5), nous obtenons

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0 , \quad (3.6)$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{du^\gamma}{ds} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 . \quad (3.7)$$

Le centre du paquet d'onde suit une géodésique de l'espace-temps considéré.

3.2.2 La perturbation de la phase en champ faible

Dans cette section nous étudions la perturbation de la phase ϕ d'une onde scalaire due à une perturbation $h_{\alpha\beta}$ de la métrique de la forme (2.49). Nous supposons que la propagation de la phase est régie par l'équation eikonale (3.3).

Considérons la propagation de l'onde entre deux éléments optiques* A et B. Nous développons la phase ϕ au premier ordre par rapport à la perturbation métrique : $\phi = \phi_o + \delta\phi$, où ϕ_o est la phase non perturbée et $\delta\phi$ est la perturbation d'ordre $|h_{\alpha\beta}|$. La solution de l'équation eikonale non perturbée est connue : $\phi_o = k_\mu x^\mu + \text{cste}$, avec $k_\mu = \partial_\mu \phi_o = \eta_{\mu\nu} p^\nu / \hbar$, où p^ν est l'impulsion non perturbée de la particule. Pour une onde de matière $p^\nu = \gamma_{v_a} mc (1, \vec{v}_a/c)$, où \vec{v}_a est la vitesse de groupe de l'onde et $\gamma_{v_a} = (1 - v_a^2/c^2)^{-1/2}$. Remarquons que l'énergie de l'atome est $E = \hbar ck^0$.

Appelons $x_A^\mu = x_A^\mu(t)$ et $x_B^\mu = x_B^\mu(t)$ les lignes d'univers des deux éléments optiques. Connaissant k^μ et t_B , le temps d'arrivée de la particule, nous en déduisons t_A , son temps de départ, grâce aux équations $x_B^\mu - x_A^\mu = \alpha k^\mu$, où α est une constante. Ceci est illustré sur la figure 3.1. Nous définissons $[\phi]_A^B \equiv \phi[x_B^\mu(t_B)] - \phi[x_A^\mu(t_A)]$. Pour calculer $[\phi]_A^B$ nous utilisons la méthode décrite† par Linet et Tourrenc [157] et Stodolsky [204]. La solution est :

$$[\phi]_A^B = [\phi_o]_A^B + [\delta\phi]_A^B , \quad (3.8)$$

où

$$[\phi_o]_A^B = k_\mu x_B^\mu - k_\mu x_A^\mu , \quad (3.9)$$

*On appelle élément optique un miroir ou une séparatrice (optique ou atomique).

†Stodolsky ne semble pas avoir connaissance de l'article de Linet et Tourrenc, qui est antérieur de trois ans, au moment où il rédige le sien.

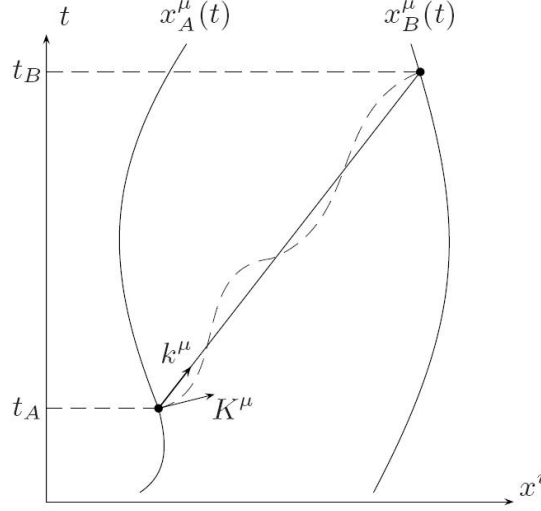


FIG. 3.1 – L’onde de matière se propage entre les deux éléments optiques A et B (ligne pointillé). La ligne droite est la trajectoire non perturbée.

$$[\delta\phi]_A^B = \frac{\hbar c^2}{2} \int_{t_A}^{t_B} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \frac{dt}{E} . \quad (3.10)$$

L’intégration dans l’équation (3.10) est faite le long de la trajectoire non perturbée (la ligne droite de la figure 3.1).

Comme la phase est un scalaire, $[\phi]_A^B$ est indépendant du système de coordonnées choisi, bien que la décomposition (3.8) ne le soit pas. Un changement de coordonnées infinitésimal implique un changement du terme du premier ordre en $k_{\alpha\beta}$ dans les fonctions $x_{A,B}^\mu(t)$ et un changement de la forme de la perturbation métrique dans la relation (3.10) (Sec. 2.3.1). Les deux effets doivent être pris en compte. Ainsi, contrairement à l’allégation de [Chiao et Speliotopoulos](#) [69], nous pouvons montrer explicitement que le résultat (3.8) est invariant par changement de coordonnées infinitésimal.

3.2.3 Interprétation des différents termes

Nous supposons que l’appareil est un interféromètre de dimension L . Nous allons voir quels sont les ordres de grandeur de la perturbation de la différence de phase d’après la formule (3.10), selon le terme considéré : h_{00} , h_{0i} ou h_{ij} .

Terme temporel Le terme h_{00} conduit à un déphasage $\Delta\phi$ de l’interféromètre

$$\Delta\phi \sim \frac{1}{2} \frac{E}{\hbar} \int h_{00} dt .$$

Nous avons vu dans la section 2.3.2 que l'accélération de l'*apparatus* peut être modélisée par une perturbation de la métrique : $h_{00} \sim 2\gamma L/c^2$, avec γ l'accélération et L la dimension de l'*apparatus*. D'après la formule précédente, l'ordre de grandeur de la différence de phase est alors

$$\Delta\phi \sim \frac{E}{\hbar c^2} \cdot \frac{\gamma \mathcal{A}}{V} ,$$

où \mathcal{A} est l'aire de l'interféromètre, $V = c$ pour la lumière ou $V = \|\vec{v}_a\| \equiv v_a$ pour une onde de matière. La différence de phase est généralement beaucoup plus grande pour un interféromètre atomique que pour un interféromètre optique ; le rapport de l'une à l'autre, pour une même aire, est $\Delta\phi_a/\Delta\phi_l \sim \lambda_l \lambda_a / \lambda_C^2$, où λ_l est la longueur d'onde lumineuse, λ_a est la longueur d'onde de de Broglie de l'atome et $\lambda_C = h/mc$ est la longueur de Compton de l'atome. Généralement $\lambda_l \gg \lambda_C$ et $\lambda_a \gg \lambda_C$, d'où $\Delta\phi_a \gg \Delta\phi_l$. Mais l'aire d'un interféromètre optique peut être beaucoup plus grande que celle d'un interféromètre atomique, ainsi que son rapport signal à bruit. Nous n'examinerons pas cela en détail, mais on peut se référer à la thèse de [Leduc \[153\]](#) qui traite de ces questions.

Le champ de pesanteur terrestre peut induire aussi une différence de phase. Nous supposons que l'une des directions de l'interféromètre est dirigé dans le sens de la pesanteur, sa dimension dans cette direction étant L_z , et que l'autre direction lui est perpendiculaire. Nous déduisons que la perturbation métrique $h_{00} \sim 2gL_z/c^2$, où g est la valeur de la pesanteur. Alors

$$\Delta\phi \sim \frac{E}{\hbar c^2} \cdot \frac{gL_z}{V} .$$

Pour une onde de matière, nous calculons $\Delta\phi \sim gm\mathcal{A}/\hbar v_a$. Dès 1975 [Colella et al. \[78\]](#) ont mesuré cette différence de phase dans un interféromètre à neutrons. Des expériences plus récentes de gravimétrie utilisent des atomes froids, sur un autre principe que celui décrit ci-dessus [\[67, 178\]](#).

Terme croisé Le terme croisé h_{0i} implique un déphasage de l'interféromètre

$$\Delta\phi \sim \frac{c}{\hbar} \int h_{0i} p^i dt .$$

Dans la section 2.2.1 nous avons vu que le terme croisé peut être dû à une rotation Ω , avec $h_{0i} \sim \Omega L/c$. Ce terme de rotation peut avoir plusieurs origines : rotation du re-

père spatial, effet Lense-Thirring, précession de Thomas, terme de de Sitter (PPN ou onde gravitationnelle). La différence de phase dans l'interféromètre est alors

$$\Delta\phi \sim \frac{p\mathcal{A}}{\hbar V}\Omega .$$

Comme précédemment, faisons le rapport de la différence de phase dans un interféromètre atomique par rapport à celle d'un interféromètre optique : $\Delta\phi_a/\Delta\phi_l \sim E_a/E_l$, où E_a est l'énergie d'un atome et E_l celle d'un photon. Ce rapport atteint 10^{11} lorsque l'on compare un gyromètre à atome de Césium avec un gyromètre à laser Hélium-Néon. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, l'aire d'un interféromètre atomique, de l'ordre du mm^2 , est beaucoup plus petite que celle d'un interféromètre optique, pouvant atteindre le m^2 . De plus, le rapport signal à bruit en optique atomique est beaucoup plus faible qu'en optique photonique, du fait des faibles flux des jets atomiques comparés aux flux gigantesques réalisables avec un laser. Actuellement, ces effets se compensent, et les performances des gyromètres atomiques sont du même ordre que celles des gyromètres laser [63, 153].

Terme spatial La partie spatiale de la perturbation métrique h_{ij} conduit au déphasage

$$\Delta\phi \sim \frac{c^2}{2\hbar E} \int p^i p^j h_{ij} dt .$$

Pour une onde gravitationnelle, la perturbation métrique dans les coordonnées d'Einstein est $h_{ij} = h_{ij}^E$ (Eq. (2.72)). Nous calculons alors

$$\Delta\phi \sim \pi \frac{V}{\lambda\Omega} h^E ,$$

où h^E est l'amplitude de l'onde gravitationnelle, et Ω sa pulsation. Supposons qu'un interféromètre optique détecte une onde gravitationnelle de même pulsation qu'un interféromètre atomique. Nous obtenons alors $\Delta\phi_a/\Delta\phi_l \sim E_c/E_l$, où E_c est l'énergie cinétique d'un atome. Pour qu'un interféromètre à atome de Césium ait la même différence de phase qu'un interféromètre à laser He-Ne, il faut que $v_a \sim 1 \text{ km.s}^{-1}$. Nous verrons dans la deuxième partie que le meilleur mode de fonctionnement d'un interféromètre est obtenu lorsque $L \sim V/\Omega$. En continuant notre exemple, nous déduisons que l'interféromètre atomique est beaucoup plus petit que l'interféromètre optique : $L_a \sim 3.10^{-6} L_l$. C'est un gros avantage car un petit appareil est plus efficacement refroidi, ce qui limite le bruit thermique.

Imaginons maintenant une autre situation dans laquelle les deux types d'interféromètres sont de même taille. Alors $\Delta\phi_a/\Delta\phi_l \sim \lambda_l/\lambda_a$. Or la longueur d'onde d'une onde atomique peut être beaucoup plus petite que celle d'un laser. Par exemple, dans l'interféromètre décrit par Gustavson *et al.* [131], $\lambda \simeq 10 \text{ pm}$. À longueur égale, la différence de phase de cet interféromètre atomique est 10^5 fois plus grande que celle d'un interféromètre à laser He-

Ne. Cependant le rapport signal à bruit va compenser cet effet. Dans le chapitre 5 nous étudierons cette question en détail.

3.3 La limite non relativiste

3.3.1 L'équation de Schrödinger en champ faible

Approximation champ faible Contrairement à la partie précédente, nous supposons dès le départ que le champ est faible, et nous simplifions l'équation de Klein-Gordon (3.2) :

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \sigma^\alpha \partial_\alpha - k^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \right] \Psi = 0 , \quad (3.11)$$

où

$$\sigma^\alpha = \frac{k^{\alpha}}{2} - k^{\alpha\beta}{}_{,\beta} .$$

Approximation non relativiste Nous supposons que la fonction d'onde est celle d'une onde atomique, et que les atomes sont très refroidis. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un traitement relativiste de la matière. On introduit la relation usuelle* entre la fonction d'onde relativiste Ψ et la fonction d'onde de Schrödinger Φ :

$$\Psi(x^\mu) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \Phi(x^\mu)$$

Nous négligeons les interactions entre atomes : chaque atome répond à la même équation d'onde, sans terme d'interaction. En revanche, nous introduisons dans l'équation l'énergie potentielle $V(x^i)$ d'un atome dans un champ extérieur. L'équation d'onde (3.11) devient alors :

$$\begin{aligned} & \overbrace{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}}^A - \overbrace{\frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}^B + \overbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Phi}^C + \overbrace{V \Phi}^D \\ & + \overbrace{\sigma^0 \frac{i\hbar c}{2} \Phi}^F - \overbrace{\sigma^0 \frac{\hbar^2}{2mc} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}^G - \overbrace{k^{00} \frac{1}{2} mc^2 \Phi}^H - \overbrace{k^{00} i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}}^I + \overbrace{k^{00} \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}^J \\ & - \overbrace{k^{0i} i\hbar c \partial_i \Phi}^L + \overbrace{k^{0i} \frac{\hbar^2}{mc} \partial_i \frac{\partial \Phi}{\partial t}}^M - \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^i \partial_i \Phi + \frac{\hbar^2}{2m} k^{ij} \partial_i \partial_j \Phi = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

*Car $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \simeq mc^2 + \dots$

Nous décomposons l'énergie du champ en une énergie cinétique E_c et une énergie potentielle E_V : l'énergie totale du champ est $E = E_c + E_V$. L'approximation non relativiste consiste à supposer que les énergies cinétiques et potentielles sont négligeables devant l'énergie de masse mc^2 :

$$|E_c|, |E_V| \ll mc^2 \Rightarrow |E| \ll mc^2 . \quad (3.13)$$

Nous supposons aussi que l'énergie du champ perturbateur, si celui-ci dépend du temps, est aussi négligeable devant l'énergie de masse. Prenons l'exemple d'une onde gravitationnelle : cette condition équivaut au fait que la longueur d'onde gravitationnelle Λ doit être grande devant la longueur d'onde de Compton $\bar{\lambda}_C = \lambda_C/2\pi$ du champ scalaire :

$$\Lambda \gg \frac{\hbar}{mc} = \bar{\lambda}_C . \quad (3.14)$$

Ordres de grandeurs des différents termes Le champ scalaire Φ ressent la perturbation de la métrique : nous le décomposons en $\Phi = \overset{0}{\Phi} + \overset{1}{\Phi}$, où $\overset{1}{\Phi}$ est le champ perturbé, qui est d'ordre 1 en k , avec k l'ordre de grandeur de la perturbation de la métrique. Chaque terme de la première ligne de l'équation (3.12) se décompose alors en une partie non perturbée et une partie perturbée. Nous les notons respectivement avec un 0 et un 1 en chapeau. Pour chaque terme, $\overset{1}{\Phi}/\overset{0}{\Phi} \sim k$. Dans les termes de la deuxième et de la troisième ligne, il n'est pas nécessaire de prendre $\overset{1}{\Phi}$ en compte car se sont déjà des termes d'ordre 1 en k .

Nous remarquons que :

$$|\overset{0}{A}| \sim E, |\overset{0}{C}| \sim E_c, |\overset{0}{D}| \sim E_V . \quad (3.15)$$

Alors :

$$\begin{aligned} - |\overset{0}{B}|/|\overset{0}{A}| &\sim \frac{|E|}{mc^2} \ll 1 & - |G|/|F| &\sim \frac{|E|}{mc^2} \ll 1 \\ - |I|/|H| &\sim \frac{|E|}{mc^2} \ll 1 & - |J|/|H| &\sim \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \ll 1 \\ - |M|/|L| &\sim \frac{|E|}{mc^2} \ll 1 \end{aligned}$$

La perturbation métrique $k_{\alpha\beta}$ étant différente suivant le référentiel choisi, l'équation d'onde non relativiste n'est pas covariante. Nous ne comparons pas les différents termes de la perturbation entre eux, certains pouvant s'annuler. L'équation d'onde n'étant pas covariante, la description d'une expérience est différente suivant le choix du référentiel, mais l'observable ne l'est pas. Nous pouvons faire le lien entre les différentes descriptions d'une même expérience par le changement de coordonnées infinitésimal adéquat (Sec. 2.3.1).

Dans la partie perturbée de la première ligne de l'équation (3.12), pour une onde gravitationnelle, nous obtenons $|\overset{1}{A}| \sim \hbar c / \Lambda$. D'où :

$$|\overset{1}{B}|/|\overset{1}{A}| \sim \frac{\bar{\lambda}_C}{\Lambda} \ll 1$$

Équation de Schrödinger Compte tenu des approximations précédentes, il est possible de réécrire l'équation d'onde (3.12) sous la forme d'une équation de Schrödinger :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{W}) \Phi}, \quad (3.16)$$

avec

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \overset{0}{V} \quad (3.17)$$

et

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} (mc^2 k^{00} - i\hbar c \sigma^0) + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \sigma^i + i\hbar c k^{0i} \right) \partial_i - \frac{\hbar^2}{2m} k^{ij} \partial_i \partial_j + \overset{1}{V}. \quad (3.18)$$

3.3.2 Quelques applications

L'équation de Schrödinger en métrique PPN Dans le référentiel géocentrique, la métrique est définie par les relations (2.54). Le système de coordonnées est (ct, \vec{x}) . Nous calculons les différents termes* :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mc^2 k^{00} &= -mW \left(1 + \tilde{O}_2 \right) \\ \frac{1}{2} \hbar c \sigma^0 &\sim mU \kappa \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{R} \right) \left(\frac{cJ}{GM^2} \tilde{O}_2 \right) \\ \hbar c k^{0i} \partial_i &\sim mU \left(\frac{v_a}{c} \right) \left(\frac{cJ}{GM^2} \tilde{O}_2 \right) \\ \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^i \partial_i &\sim mU \kappa \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{R} \right) \left(\frac{v_a}{c} \right) \\ \frac{\hbar^2}{2m} k^{ij} \partial_i \partial_j &\sim mU \left(\frac{v_a}{c} \right)^2, \end{aligned}$$

où v_a est la vitesse newtonienne de l'atome dans le référentiel géocentrique, et $U = -GM/r$. Nous supposons que $cJ/GM^2 \tilde{O}_2 \lesssim 1$. En l'absence de potentiel, l'équation de Schrödinger s'écrit alors

*Contrairement au chapitre 2, nous utilisons ici les unités S.I., ce qui devrait satisfaire les expérimentateurs !

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \Phi - mW \Phi \left(1 + \tilde{O}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{v_a}{c}\right) + \mathcal{O}\left(\kappa \frac{\bar{\lambda}_C}{R}\right) \right)},$$

où nous rappelons que

$$W(\vec{x}) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right].$$

Nous retrouvons ainsi le résultat newtonien : $-mW$ est l'énergie potentielle de la particule dans le champ gravitationnel. Dans cette approximation, nous pouvons interpréter le champ gravitationnel comme une force \vec{F} dérivant du potentiel W , d'après la relation $\vec{F} = m\vec{\nabla}W$.

Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel de Fermi, qui est un référentiel local. La métrique est donnée par les relations (2.71). Le système de coordonnées est (cT, \vec{X}) . Les termes de \mathcal{W} sont

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mc^2 k^{\hat{0}\hat{0}} &= m\vec{\gamma} \cdot \vec{X} - mU \left[\frac{\vec{X}^2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{X})^2}{2r^2} + \frac{15(\vec{n} \cdot \vec{X})^3 - 9(\vec{n} \cdot \vec{X})\vec{X}^2}{6r^3} + \kappa^3 \epsilon^2 O_4 \right] \\ \frac{1}{2}\hbar c \sigma^{\hat{0}} &\sim mU \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{R} \right) \frac{\epsilon R^2}{\kappa c^2 O_1} \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \right\| \\ \hbar c k^{\hat{0}\hat{i}} \partial_{\hat{i}} &\sim mU \left(\frac{V_a}{c} \right) \left(\kappa^{3/2} \epsilon O_2 + \frac{cJ}{GM^2} \kappa^2 \epsilon O_3 \right) \\ \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^{\hat{i}} \partial_{\hat{i}} &\sim mU \kappa \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{R} \right) \left(\frac{V_a}{c} \right) \\ \frac{\hbar^2}{2m} k^{\hat{i}\hat{j}} \partial_{\hat{i}} \partial_{\hat{j}} &\sim mU \left(\frac{V_a}{c} \right)^2 \kappa \epsilon^2 O_2, \end{aligned}$$

où V_a est la vitesse newtonienne de l'atome dans le référentiel local. Nous n'avons pas pris en compte les moments multipolaires du développement de W et de \vec{W} . Cela revient à considérer le corps central comme sphérique. Nous supposons que $\|d\vec{\gamma}/ds\| \lesssim \kappa c^2 O_1/R^2$ et que $cJ/M^2 G \kappa^2 \epsilon O_1 \lesssim 1$. L'équation de Schrödinger dans le référentiel de Fermi s'écrit alors

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial T} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_X + m\vec{\gamma} \cdot \vec{X} \right) \Phi - mU \Phi \left[\frac{\vec{X}^2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{X})^2}{2r^2} + \frac{15(\vec{n} \cdot \vec{X})^3 - 9(\vec{n} \cdot \vec{X})\vec{X}^2}{6r^3} + \kappa^3 \epsilon^2 O_4 + \mathcal{O}\left(\frac{v_a}{c} O_2\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\bar{\lambda}_C}{R}\right) \right]}.$$

L'équation de Schrödinger et les ondes gravitationnelles Dans les coordonnées d'Einstein (ct, \vec{x}) , la métrique est donnée par la formule (2.72). L'équation de Schrödinger est obtenue simplement :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_x + h_E^{rs} \partial_r \partial_s) \Phi + V \Phi},$$

où $r, s = 1, 2$. Nous obtenons le même résultat que Grafe et Dehnen [125].

Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel de Fermi, avec les coordonnées (cT, \vec{X}) . La métrique est donnée par la formule (2.87). Nous calculons pour les différents termes de \mathcal{W} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mc^2 k^{\hat{0}\hat{0}} &= \frac{1}{2} mc^2 \left(\frac{2}{c^2} \vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \frac{1}{c^4} (\vec{\gamma} \cdot \vec{X})^2 + \frac{1}{2} \bar{h}_{jk,00}^E X^j X^k + \epsilon^2 O_7 \right) \\ \frac{1}{2} \hbar c \sigma^{\hat{0}} &\sim m \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{\Lambda} \right) \epsilon \Lambda^2 O_1 \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \right\| \\ \hbar c k^{\hat{0}\hat{i}} \partial_{\hat{i}} &\sim mc^2 \left(\frac{V_a}{c} \right) O_4 \\ \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^{\hat{i}} \partial_{\hat{i}} &\sim mc^2 \left(\frac{V_a}{c} \right) \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{\Lambda} \right) O_2 \\ \frac{\hbar^2}{2m} k^{\hat{i}\hat{j}} \partial_{\hat{i}} \partial_{\hat{j}} &\sim mc^2 \left(\frac{V_a}{c} \right)^2 \epsilon^2 O_4. \end{aligned}$$

Nous supposons que $\|d\vec{\gamma}/ds\| \lesssim c^2 O_1 / \Lambda^2$. L'équation de Schrödinger s'écrit alors

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial T} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_X + V + m \vec{\gamma} \cdot \vec{X} + \frac{m}{2c^2} (\vec{\gamma} \cdot \vec{X})^2 \right) \Phi + mc^2 \left(\frac{1}{4} \bar{h}_{jk,00}^E X^j X^k + \epsilon^2 O_7 + \mathcal{O} \left(\frac{V_a}{c} O_4 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\bar{\lambda}_C}{\Lambda} O_2 \right) \right)} \quad (3.19)$$

Dans le chapitre 6, nous étudierons en détail les effets d'une onde gravitationnelle sur une cavité atomique, grâce à cette équation.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE DE QUELQUES EXPÉRIENCES

LE PROJET HYPER

SOMMAIRE

4.1 DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE	87
4.2 LE RÉFÉRENTIEL TOURNANT	90
4.3 LA DIFFÉRENCE DE PHASE	93

HYPER*, « High precision atom interferometry in space », a réuni une communauté de spécialistes autour d'un projet de satellite embarquant des interféromètres atomiques. Son but scientifique est d'explorer les limites des théories de l'électromagnétisme et de la gravitation. La mission a été proposée en janvier 2000, en réponse à l'appel d'offre de l'ESA pour des missions à bas coût, pour un lancement durant la période 2008-2011. Entre les mois de mars et juillet 2000, une étude de faisabilité a été conduite par l'ESTEC[†], en conclusion de laquelle l'ESA a décidé que cette mission n'avait pas atteint la maturité technologique suffisante pour partir à l'horizon 2008-2011[‡]. Cependant, cette mission a été reconnue comme ayant un très grand potentiel pour la recherche fondamentale en physique dans l'espace. C'est pourquoi une étude industrielle de phase A a été menée entre juin 2002 et mars 2003. De plus, Hyper a été l'objet de nombreuses contributions de la part de la communauté scientifique, dont on peut avoir un aperçu dans les présentations du symposium de novembre 2002 [196].

Marie-Christine Angonin et Philippe Tournenc ont traité la question de la sensibilité d'Hyper pour la détection de l'effet Lense-Thirring avant le début de ma thèse [23, 214]. J'ai

*<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=46>

[†]European Space Research and Technology Centre, situé aux Pays-Bas.

[‡]En septembre 2000, le FPAG, « Fundamental Physics Advisory Group » de l'ESA, concluait : « *Hyper is a mission in a completely new field of space science and has, therefore, not quite reached the technical maturity of other extensively studied projects. Also, the field of cold atoms and matter-wave interferometry is developing rapidly and thus the FPAG recommended not to select Hyper for a flight mission at this time (...) but to continue studies of the Hyper mission and to initiate technology development in areas relevant for Hyper* ».

ensuite participé à l'évolution des calculs et à l'élaboration des outils théoriques présentés dans la première partie. Dans le cadre général d'un interféromètre atomique embarqué à bord d'un satellite, nous avons calculé la différence de phase dans une métrique PPN [22]. L'étude de cette expérience, comme celles des chapitres 5 et 6, est une application des outils mis en place dans la première partie.

4.1 Description de l'expérience

Dans le satellite sont placés un télescope pointant vers une étoile lointaine, de direction $\vec{u}_{(1)}$, et deux unités atomiques Sagnac (UAS) dans les plans $[\vec{u}_{(2)}, \vec{u}_{(1)}]$ et $[\vec{u}_{(3)}, \vec{u}_{(1)}]$ de la figure 4.1.

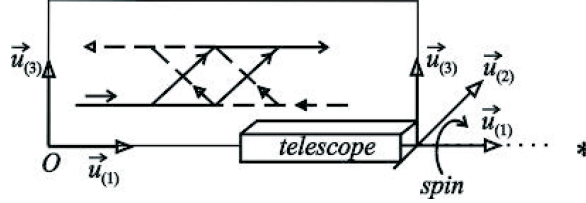


FIG. 4.1 – Le montage expérimental.

Chaque UAS est constituée de deux interféromètres atomiques de type Ramsey-Bordé (voir l'annexe A et la figure 4.2b). Ils sont contra-propageants (Fig. 4.2a), ce qui permet de distinguer la rotation de l'accélération dans le signal de l'UAS [130]. En effet, le vecteur vitesse intervient dans le déphasage dû à la rotation, mais pas dans celui dû à l'accélération. Ainsi, l'inversion du sens de propagation des atomes change le signe du déphasage de rotation et laisse inchangé le déphasage d'accélération. La demi-somme et la demi-différence des signaux des deux interféromètres contra-propageants donnent alors respectivement le déphasage d'accélération et le déphasage de rotation.

Dans un montage idéal, les deux interféromètres sont des parallélogrammes identiques et coplanaires, dont les centres O_S et O'_S sont parfaitement superposés. Cependant, la géométrie de l'UAS dépend de l'interaction entre le jet atomique et les lasers. Ainsi, le traitement de l'interaction atome-laser dans un champ gravitationnel semble nécessaire pour déterminer le signal de l'UAS. Cette approche a été considérée par Antoine et Bordé [24, 25, 51]. L'étude d'une configuration idéale permet pourtant d'avoir une approche plus simple des phénomènes gravitationnels à prendre en compte. Nous considérerons dans la suite comme seule « perturbation géométrique » le fait que O_S et O'_S puissent ne pas être superposés.

Pour décrire l'expérience à bord du satellite, nous utilisons, dans un premier temps, le référentiel local défini dans la section 2.3.2. B est le centre de gravité du satellite et (e_α) est la tétrade définie par les formules (2.58). Nous allons étudier trois cas plus particulièrement :

- une orbite terrestre : c'est l'orbite la plus proche de nous, donc la plus facilement atteignable par un satellite.
- une orbite solaire : le Soleil est l'objet le plus massif du système solaire, on peut donc s'attendre à ce que l'effet Lense-Thirring soit grand.
- une orbite jovienne : Jupiter est le deuxième objet le plus massif du système solaire

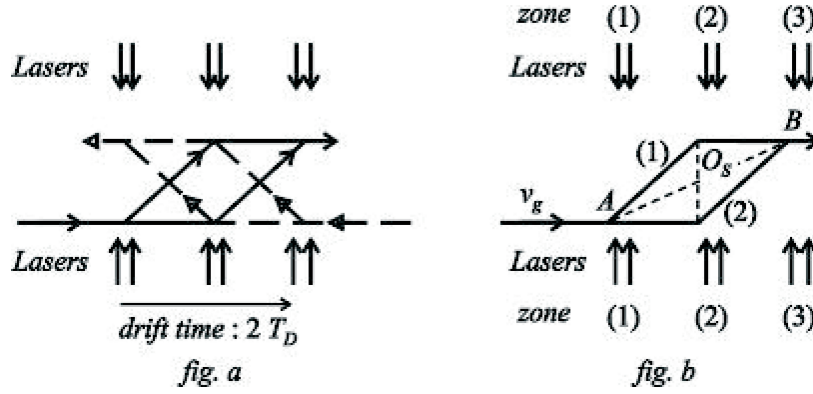


FIG. 4.2 – (a) Une unité atomique Sagnac (UAS) (gauche) est constituée de deux (b) interféromètres de type Ramsey-Bordé (droite).

et il tourne vite (une rotation en neuf heures), on peut donc aussi s'attendre à ce que l'effet Lense-Thirring soit grand.

Les potentiels W de la Terre, de Jupiter et du Soleil sont définis par leurs masses M , leurs rayons R , leurs moments dipolaires J_2 et leurs moments d'ordres supérieurs, représentés par Δ (Eq. (2.55)). Des notations différentes pour chaque astre ne sont pas nécessaires, car le traitement formel est identique. Nous ne considérerons dans la suite que le terme d'ordre 0 dans le développement de \vec{W} (Eq. (2.56)) ; il est donc caractérisé par le moment angulaire \vec{J} . Les caractéristiques* des trois corps sont résumées dans le tableau 4.1.

	M	J	R	J_2	Δ
Terre	4.4 mm	145 cm ²	6400 km	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-6}$
Jupiter	1.4 m	1700 m ²	71300 km	$\sim 10^{-2}$	$\lesssim 10^{-3}$
Soleil	1.47 km	0.47 km ²	696 000 km	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-7} - 10^{-9}$

TAB. 4.1 – Caractéristiques des corps centraux.

L'éloignement du satellite par rapport au corps central est défini par le paramètre κ . Nous rappelons les caractéristiques de l'orbite du satellite selon κ dans le tableau 4.2 : son rayon r , sa vitesse v et sa période de rotation T_P . La taille d des UAS à l'intérieur du satellite est décrite par le paramètre ϵ . Nous fixons $d \sim 60$ cm. Nous ajoutons le paramètre η ; il donne l'ordre de grandeur de la vitesse newtonienne V_a des atomes dans le référentiel propre par la relation $V_a = \eta O_1$, où $O_1 = \sqrt{M/R}$. Nous fixons $V_a \sim 20$ cm.s⁻¹. Nous définissons le temps de parcours T_D d'un atome dans un bras de l'interféromètre par la relation $2T_D = d/V_a$. Enfin, nous introduisons un dernier paramètre, μ , qui est la précision

*Nous utilisons des unités géométriques, ie. $c = G = 1$. Les correspondances avec les unités S.I. sont données dans l'annexe .

relative de la connaissance de toutes les quantités du problèmes. Les caractéristiques de l'expérience sont résumées dans le tableau 4.2.

$O_1 = \sqrt{M/R}$		précision relative : μ	
Caractéristiques de l'orbite		Caractéristiques des UAS.	
Rayon	$r = R/\kappa$	Taille	$d = RO_1\epsilon \sim 60 \text{ cm}$
Vitesse	$v = O_1\kappa^{1/2}$	Vitesse des atomes	$V_a = \eta O_1 \sim 20 \text{ cm.s}^{-1}/c$
Période	$T_P = \frac{2\pi}{\kappa^{1/2}O_1} \frac{R}{c\xi}$	Temps de vol	$2T_D = d/V_a c = R \frac{\epsilon}{\eta c} \sim 3 \text{ s}$

TAB. 4.2 – Caractéristiques de l'orbite du satellite et des UAS embarqués à bord.

Nous donnons les valeurs de ces caractéristiques et des différents paramètres, pour les trois corps considérés, dans le tableau 4.3.

	O_1	κ	r	v	T_P	ϵ	η
Terre	2.6×10^{-5}	0.9	7000 km	2.5×10^{-5}	5900 s	3.6×10^{-3}	2.6×10^{-5}
Jupiter	1.4×10^{-4}	0.9	78400 km	1.3×10^{-5}	12300 s	6.0×10^{-5}	4.8×10^{-6}
Soleil	1.45×10^{-3}	0.5	$1.4 \cdot 10^6 \text{ km}$	1.0×10^{-3}	29000 s	6.0×10^{-7}	4.6×10^{-7}

TAB. 4.3 – Valeurs du paramètre orbital κ , des caractéristiques orbitales, et des paramètres expérimentaux ϵ et η .

La métrique dans le référentiel de Fermi attaché au satellite est donnée par les formules (2.71). Si nous ajoutons une dépendance temporelle dans le potentiel W du corps central, due à la perturbation des autres objets dans le système solaire, nous sortons du cadre défini dans la section 2.3.2. Il est pourtant possible de montrer que ce n'est pas important tant que

$$\frac{\delta W}{W} \times \frac{r}{cT_c} \lesssim \kappa O_2, \quad (4.1)$$

où $\delta W/W$ est la variation relative du potentiel pendant le temps caractéristique T_c . Ceci est généralement le cas.

D'après la formule (2.66) nous pouvons évaluer la valeur de la vitesse angulaire du satellite due à l'effet Lense-Thirring. Nous trouvons

$$\|\vec{\Omega}_{LT}\| \sim \frac{J}{M^2} \kappa^3 \frac{c}{R} O_4 \quad (4.2)$$

Ces valeurs sont calculées dans le tableau 4.4 pour les différents corps étudiés. Le moment angulaire dû à l'effet Lense-Thirring est plus grand autour de Jupiter ou du Soleil qu'around de la Terre, comme nous l'avions pressenti. Cela ne veut pas dire qu'il est plus facile à

mesurer : il faut comparer les autres effets, comme les effets de marées, à l'effet Lense-Thirring.

	J/M^2	$\ \vec{\Omega}_{LT}\ $
Terre	750	$\sim 10^{-14} \text{ rad.s}^{-1}$
Jupiter	855	$\sim 10^{-12} \text{ rad.s}^{-1}$
Soleil	0.22	$\sim 10^{-13} \text{ rad.s}^{-1}$

TAB. 4.4 – Valeur du moment angulaire du satellite du à l'effet Lense-Thirring.

4.2 Le référentiel tournant

Un télescope dans le satellite pointe vers une étoile lointaine, dont la parallaxe est supposée négligeable. Le rayon lumineux provenant de l'étoile est dévié par la déformation de l'espace-temps due au corps central. Cela se traduit pour l'observateur par une perturbation de la direction de l'étoile. Pour calculer cette perturbation nous utilisons la méthode décrite dans la section 3.2.2. Nous paramétrisons la trajectoire du rayon lumineux par λ . L'étoile est au point A alors que le satellite est situé au point B , et L est un point de paramètre λ (Fig. 4.3).

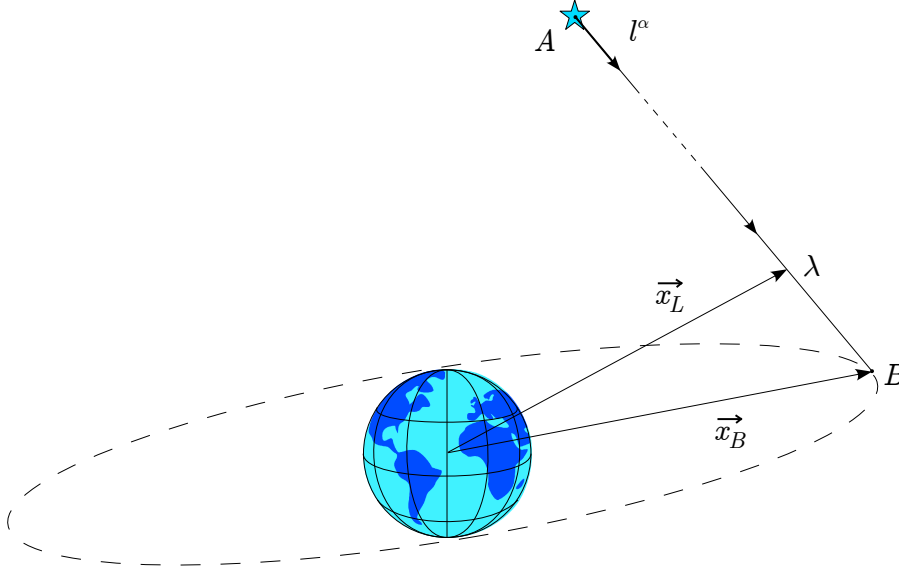


FIG. 4.3 – Direction perturbée de l'étoile de référence.

Nous définissons $l^\alpha = c/\omega \cdot k^\alpha$, la direction non perturbée de l'étoile, et $L^\alpha = c/\omega \cdot K^\alpha$, sa direction perturbée. ω est la pulsation de l'onde lumineuse. D'après la formule (3.10) :

$$\delta\phi(\lambda) = \frac{\omega}{2c} l^\alpha l^\beta \int_{\lambda_A}^{\lambda} h_{\alpha\beta}(\lambda') d\lambda' . \quad (4.3)$$

Nous calculons alors la perturbation de la direction de l'étoile vue depuis le satellite :

$$\delta L_i(\lambda_B) = \frac{c}{\omega} \partial_i \delta\phi(\lambda_B) = \frac{1}{2} l^\alpha l^\beta \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \frac{x_L^i}{r_L} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial r_L} d\lambda , \quad (4.4)$$

où $x_L^i = x_B^i + \lambda l^i$, et $r_L = (\sum (x_L^i)^2)^{1/2}$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_k &= -l_k + \delta L_k = -l^k + \frac{M'}{r_B} (1 + \gamma) \frac{n^k - l^k}{1 - \vec{n} \cdot \vec{l}} + \Delta l^k + \Delta L^k , \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $M' = M(1 - \alpha_1 \vec{v}_r \cdot \vec{l}/2(1 + \gamma))$ et $\vec{n} = \vec{x}_B/r_B$. Δl^k est dû au terme quadrupolaire du développement du potentiel W . Il est calculé dans l'article [23]. Son ordre de grandeur est $\Delta l^k \sim \kappa^2 J_2 O_2$ lorsque \vec{l} est presque orthogonal au plan de l'orbite. ΔL^k est le terme dû à la rotation du corps central. Son ordre de grandeur est $\Delta L^k \sim O_4 J/M^2$. Il est négligeable devant les autres termes.

Le vecteur \mathbf{L} , dans la formule (4.5), est écrit dans la base (∂_α) , qui est le repère naturel associé au système de coordonnées \mathbf{x} du référentiel géocentrique (Sec. 2.3.2). Nous définissons $\boldsymbol{\lambda}$, la projection de \mathbf{L} sur l'hypersurface engendrée par la partie spatiale de la tétrade (e_α) , ie. $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L} - \mathbf{g}(\mathbf{L}, e_0)e_0$; cette projection est illustrée sur la figure 4.4. Les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ dans la tétrade (e_α) sont alors

$$\begin{aligned} \lambda^{\hat{0}} &= 0 \\ \lambda^{\hat{k}} &= -\lambda_{\hat{k}} = -e_{\hat{k}}^\mu L_\mu . \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\lambda^{\hat{k}} = l^k (1 - \gamma W) - v^k \left(1 - \frac{1}{2} \vec{l} \cdot \vec{v} \right) - \delta L^k + \tilde{O}_3 . \quad (4.6)$$

C'est la direction de l'étoile dans le repère spatial $(e_{\hat{k}})$ attaché au satellite au point B . Nous voulons définir un repère dont une des directions spatiales pointe vers l'étoile. Il nous faut alors normaliser* le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$. Nous définissons $\vec{\Lambda} = \vec{\lambda}/\|\vec{\lambda}\|$, et calculons :

*Normaliser au sens des tétrades (voir la formule (2.1)).

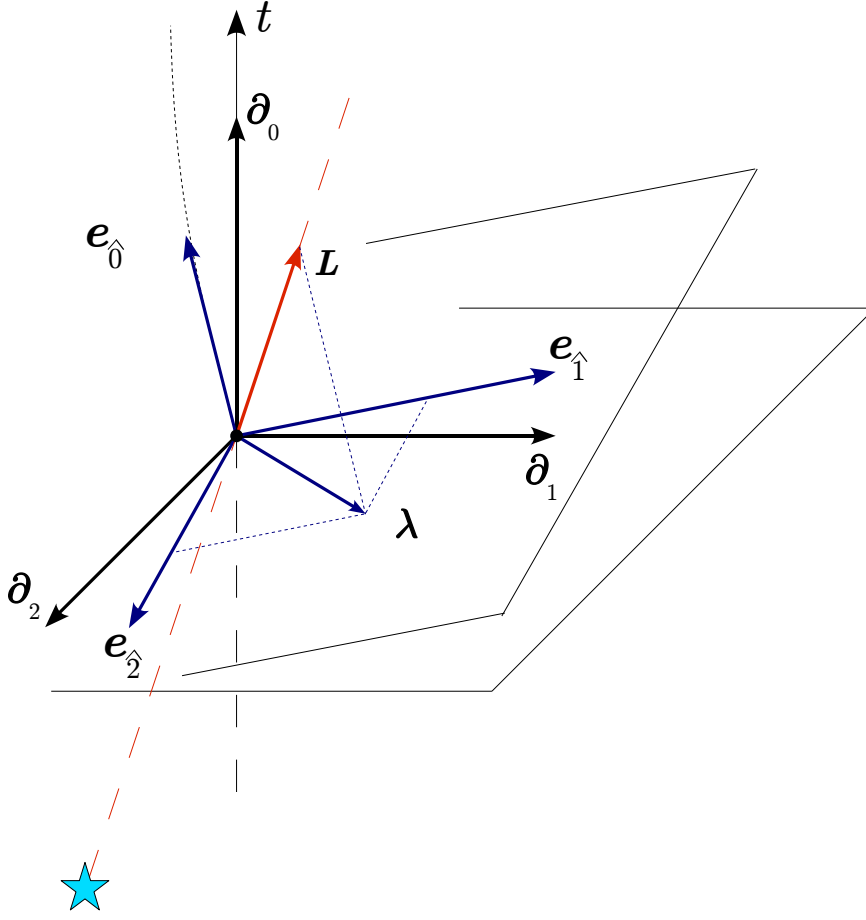


FIG. 4.4 – Direction projetée de l'étoile de référence.

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{\hat{k}} = & \ l^k \left(1 - \frac{v^2}{2} + \vec{v} \cdot \vec{l} + (\vec{v} \cdot \vec{l})^2 + \frac{M'}{r_B} (1 + \gamma) \frac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{l}} + (\Delta \vec{l} + \Delta \vec{L}) \cdot \vec{l} \right) \\
 & - v^k \left(1 + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{l} \right) - \frac{M'}{r_B} (1 + \gamma) \frac{n^k}{1 - \vec{n} \cdot \vec{l}} - \Delta l^k - \Delta L^k + \tilde{O}_3, \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

où $\tilde{O}_n = (M/r)^{n/2}$ (Eq. (2.57)). Nous définissons alors un nouveau repère, la tétrade $(\mathbf{u}_{(\alpha)})$, dont un des vecteurs spatiaux pointe vers l'étoile, ie. $u_{(1)}^{\hat{k}} = \Lambda^{\hat{k}}$, et dont le vecteur temporel reste inchangé, ie. $\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$. Le nouveau repère spatial $(\mathbf{u}_{(k)})$ est animé d'une vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{u/e}$ par rapport à l'ancien. Les deux référentiels étant quasi-Minkowskien nous utilisons la formule classique :

$$\frac{d\vec{L}}{dT} = \vec{\Omega}_{u/e} \wedge \vec{L} . \quad (4.8)$$

Nous rappelons que cT est la coordonnée temporelle du système de coordonnées normal de Fermi \mathbf{X} , défini dans la section 2.3.2. D'après la relation précédente,

$$\vec{\Omega}_{u/e} = u^0 \vec{L} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} - \varpi \vec{L} . \quad (4.9)$$

Nous définissons $\Omega_* = u^0 \vec{L} \wedge d\vec{L}/dt$, la composante perpendiculaire de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{u/e}$ par rapport à \vec{L} . ϖ est une fonction arbitraire de T . Nous calculons :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_* = & -\vec{l} \wedge \vec{a} + \vec{v} \wedge \vec{a} - \frac{3}{2}(\vec{l} \cdot \vec{v})\vec{l} \wedge \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{l} \cdot \vec{a})\vec{l} \wedge \vec{v} \\ & - \frac{M'}{r_B^2} \frac{1+\gamma}{1-\vec{n} \cdot \vec{l}} \left(\vec{l} \wedge \vec{v} + \vec{l} \wedge \vec{n} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v} - \vec{n} \cdot \vec{v}}{1-\vec{n} \cdot \vec{l}} - \vec{n} \cdot \vec{v} \right) \right) + \vec{l} \wedge \frac{d\Delta\vec{l}}{dt} + \frac{\tilde{O}_4}{r} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous pouvons écrire les composantes $G_{(\alpha)(\beta)}$ du tenseur métrique dans le repère $(\mathbf{u}_{(\alpha)})$ à l'aide des formules (2.71) :

$$\begin{aligned} G_{(0)(0)} &= 1 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} - W_{(j)(k)} X^{(j)} X^{(k)} - \frac{1}{3} W_{(j)(k)(l)} X^{(j)} X^{(k)} X^{(l)} + \kappa^4 \epsilon^2 O_6 \\ G_{(0)(m)} &= - \left\{ \left(\vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_{u/e} \right) \wedge \vec{X} \right\}^{(m)} + \kappa^{7/2} \epsilon^2 O_5 \\ G_{(n)(m)} &= -\delta_{(n)(m)} + \kappa^3 \epsilon^2 O_4 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3 La différence de phase

Dans cette section nous calculons la différence de phase d'un interféromètre atomique (Fig. 4.2b), d'après la méthode décrite dans la section 3.2.2. Nous définissons le décalage gravitationnel :

$$\Theta = G_{(0)(0)} + 2G_{(0)(m)} V_a^{(m)} + G_{(n)(m)} V_a^{(n)} V_a^{(m)} . \quad (4.12)$$

D'après la relation (3.8), la différence de phase $\Delta\phi$ à la sortie de l'interféromètre (ie. au point B de la figure 4.2b) est

$$\Delta\phi = \frac{m}{2\hbar} \left[\int_{t-2T_D/(2)}^t \Theta(t') dt' - \int_{t-2T_D/(1)}^t \Theta(t') dt' \right] \quad (4.13)$$

Les deux intégrales sont effectuées respectivement sur les chemins (2) et (1) non perturbés

de la figure 4.2b. Nous avons fixé $V_a \sim \eta O_1$ dans la section 4.1. Nous calculons alors, d'après les composantes du tenseur métrique (4.11) :

$$\begin{aligned} \Theta = & 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} - W_{,(j)(k)} X^{(j)} X^{(k)} - \frac{1}{3} W_{,(j)(k)(l)} X^{(j)} X^{(k)} X^{(l)} \\ & - 2 \left[\left(\vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_{u/e} \right) \wedge \vec{X} \right] \cdot \vec{V}_a + \epsilon^2 \kappa^4 O_6 , \end{aligned} \quad (4.14)$$

où

$$\left[\left(\vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_{u/e} \right) \wedge \vec{X} \right] \cdot \vec{V}_a = \left[\left(\vec{\Omega}_{LT} - \vec{l} \wedge \vec{a} - \varpi \vec{L} \right) \wedge \vec{X} \right] \cdot \vec{V}_a + \eta \epsilon \kappa^{5/2} O_5$$

D'après la relation (4.2), nous connaissons l'ordre de grandeur du terme dans Θ dû à l'effet Lense-Thirring :

$$\left(\vec{\Omega}_{LT} \wedge \vec{X} \right) \cdot \vec{V}_a \sim \frac{J}{M^2} \kappa^3 \eta \epsilon O_6 .$$

Nous pouvons en déduire la précision du calcul effectué pour les différents corps étudiés (Tab. 4.5).

	Terre	Jupiter	Soleil
$\frac{\kappa \epsilon}{(J/M^2)\eta}$	17%	1.3%	300%

TAB. 4.5 – Précision relative du terme dû à l'effet Lense-Thirring dans le calcul de la différence de phase.

La précision du calcul n'est pas suffisante pour traiter le cas du Soleil. Il faudrait développer la métrique de Fermi à un ordre supérieur.

Chaque terme de Θ est connu avec une précision μ . Nous supposons alors que Θ est la somme de deux termes : Θ_c , qui peut être modélisé avec la précision requise, et Θ_i , qui n'est pas connu. Cela implique que $\mu \times \Theta_c \lesssim \epsilon^2 \kappa^4 O_6$. D'après la formule (4.14), nous calculons l'ordre de grandeur des termes non connus, $\mu \times \Theta$, par rapport à la précision requise $\epsilon^2 \kappa^4 O_6$, pour $\mu \sim 10^{-4}$ (Tab. 4.6).

Nous obtenons alors

$$\Theta_i = 2\vec{\gamma} \cdot \vec{X} - W_{,(j)(k)} X^{(j)} X^{(k)} - 2 \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{X} \right) \cdot \vec{V}_a + \epsilon^2 \kappa^4 O_6 / \mu , \quad (4.15)$$

où $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{LT} + \varpi \vec{u}_{(1)} + \vec{u}_{(1)} \wedge \vec{a}$. Le deuxième terme donne des contraintes fortes sur les amplitudes des effets de marées. La connaissance du potentiel W du corps central doit être telle que $\kappa^i \Delta J_i \lesssim \kappa O_2$, où ΔJ_i est l'incertitude sur l'ordre J_i du potentiel W . Ceci est vrai pour $i = 2$, mais nous sommes loin du compte pour les ordres supérieurs. Nous pourrions

		Terre	Jupiter	
$\frac{2\mu\vec{\gamma} \cdot \vec{X}}{\epsilon^2\kappa^4O_6}$	$\lesssim \frac{\mu}{\epsilon\kappa^2O_3}$	$\lesssim 2 \cdot 10^{12}$	$\lesssim 7 \cdot 10^{11}$	$\in \Theta_i$
$\frac{\mu W_{,(j)(k)}X^{(j)}X^{(k)}}{\epsilon^2\kappa^4O_6}$	$\sim \frac{\mu}{\kappa O_2}$	$\sim 2 \cdot 10^5$	$\sim 6 \cdot 10^3$	$\in \Theta_i$
$\frac{\mu W_{,(j)(k)(l)}X^{(j)}X^{(k)}X^{(l)}}{\epsilon^2\kappa^4O_6}$	$\sim \frac{\mu\epsilon}{O_1}$	$\sim 1 \cdot 10^{-2}$	$\sim 4 \cdot 10^{-5}$	$\in \Theta_c$
$\frac{\mu \left[\left(\vec{l} \wedge \vec{a} \right) \wedge \vec{X} \right] \cdot \vec{V}_a}{\epsilon^2\kappa^4O_6}$	$\sim \frac{\mu\eta}{\epsilon\kappa^2O_2}$	$\sim 1 \cdot 10^3$	$\sim 5 \cdot 10^2$	$\in \Theta_i$
$\frac{\mu\eta\epsilon\kappa^{5/2}O_5}{\epsilon^2\kappa^4O_6}$	$\sim \frac{\mu\eta}{\epsilon\kappa^{3/2}O_1}$	$\sim 3 \cdot 10^{-2}$	$\sim 7 \cdot 10^{-2}$	$\in \Theta_c$

TAB. 4.6 — Ordre de grandeur des termes non connus par rapport à la précision requise, pour $\mu \sim 10^{-4}$.

négliger ces effets pour des valeurs de $\kappa \ll 1$. Malheureusement l'effet Lense-Thirring est proportionnel à κ^3 ; il est donc improbable que l'on puisse le mesurer sur des orbites trop éloignées, où les effets de marées sont pourtant moins importants.

De plus, le fait que les centres des deux interféromètres ne soient pas superposés ajoute une indétermination. Pour mesurer l'effet Lense-Thirring il faut que la distance entre les deux centres soit inférieure à 2 nm. Cela est très difficile à obtenir à l'heure actuelle* et montre la grande difficulté de la mission.

Il faut trouver une méthode qui nous permette de retrouver le signal dû à l'effet Lense-Thirring, de lever sa dégénérescence avec les sources de bruit. En faisant tourner le satellite, nous complexifions volontairement le signal : nous lui ajoutons une dépendance à l'angle de rotation du satellite sur lui-même. En analysant la dépendance du signal au temps, nous pouvons alors distinguer neuf fonctions du temps, au lieu de deux lorsque le satellite ne tourne pas.

Le calcul de la différence de phase (4.13) est détaillé dans les articles [23, 214]. Nous ne rapportons ici que les dépendances temporelles de chaque terme. Une analyse temporelle du signal nous permet de les distinguer les uns des autres, après avoir défini une combinaison linéaire des signaux provenant des deux interféromètres superposés. Nous définissons θ , l'angle horaire du satellite, et σ , son angle de rotation sur lui-même. Le signal est alors composé des différents termes résumés dans le tableau 4.7.

L'intérêt de faire tourner le satellite sur lui-même apparaît clairement. L'effet Lense-Thirring apparaît dans les termes en σ et $2\theta \pm \sigma$. L'existence éventuelle d'un référentiel privilégié apparaît dans les termes en $\theta \pm \sigma$.

Des termes en $2\theta \pm 2\sigma$ nous déduisons la direction de l'étoile fixe ; des termes en $\theta \pm \sigma$ nous

*D'après une discussion avec Arnaud Landragin et Philippe Bouyer.

Effet	Dépendance temporelle
Lense-Thirring	$\sigma ; 2\theta - \sigma ; 2\theta + \sigma$
Géométrie de l' <i>apparatus</i>	$\sigma ; 2\theta ; 2\sigma ; 2\theta - \sigma ; 2\theta + \sigma ; 2\theta - 2\sigma ; 2\theta + 2\sigma$
Variation locale du champ pendant le vol d'un atome	$2\theta - \sigma ; 2\theta + \sigma$
Référentiel privilégié	$\theta - \sigma ; \theta + \sigma$

TAB. 4.7 – Angles apparaissant dans les termes des combinaisons linéaires des signaux de l'UAS. θ est l'angle horaire du satellite, et σ son angle de rotation sur lui-même.

obtenons des contraintes sur l'existence d'un référentiel privilégié. Des termes en $2\theta \pm \sigma$ et σ nous calculons les paramètres géométriques et la valeur de l'effet Lense-Thirring. Enfin nous obtenons une contrainte sur la combinaison de paramètres PPN $\gamma + \alpha_1/4$. Avec cette méthode, nous n'avons plus besoin de connaître les positions précises des deux centres car nous les déduisons du signal. Cependant, nous rappelons que ce modèle géométrique est simplifié : il existe d'autres « perturbations géométriques » que le décentrage des deux interféromètres. Seul un modèle prenant en compte l'interaction des lasers avec les atomes, en plus des perturbations gravitationnelles étudiées ici, peut répondre à la question de la faisabilité de Hyper.

DÉTECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES PAR INTERFÉROMÉTRIE

SOMMAIRE

5.1	MISE EN BOUCHE	99
5.1.1	Un sujet récemment controversé	99
5.1.2	Des atomes rapides	101
5.2	LES INTERFÉROMÈTRES LIBRES	102
5.2.1	Interféromètre de Michelson-Morley	103
5.2.2	IOMs versus IOLs	106
5.3	LES INTERFÉROMÈTRES RIGIDES	108
5.3.1	Discussion sur les coordonnées « rigides »	109
5.3.2	L'interféromètre de Michelson-Morley	110
5.3.3	L'interféromètre de Ramsey-Bordé	112
5.4	LE BRUIT THERMIQUE	114

DANS ce chapitre nous étudions le problème de la détection des ondes gravitationnelles par interférométrie. Nous traitons spécialement du cas des Interféromètres à Ondes de Matière (IOMs), sujet plus neuf que la détection par interférométrie laser. Après une introduction sur la récente controverse à ce sujet, nous calculerons la différence de phase d'un IOM due à une onde gravitationnelle, puis nous la comparerons à celle d'un Interféromètre à Onde Lumineuse (IOL). Ensuite nous examinerons la différence de phase d'un IOM « rigide », après avoir défini ce terme.

Ce chapitre est inspiré de différents articles et actes de colloques [92–95].

5.1 Mise en bouche

5.1.1 Un sujet récemment controversé

Le comportement ondulatoire d'une particule massive, prédit par [de Broglie](#) [86] en 1925, a été démontré pour la première fois en 1927 par [Davisson et Germer](#) [85] dans une expérience de diffraction des électrons. Trente-cinq ans plus tard le premier interféromètre à neutrons est construit par [Maier-Leibnitz et Springer](#) [159]. En 1991, les signaux de quatre interféromètres atomiques sont obtenus à quelques mois d'intervalle par [Carnal et Mlynek](#) [64], [Keith *et al.*](#) [141], [Kasevich et Chu](#) [139] et [Riehle *et al.*](#) [187]. Depuis, les interféromètres atomiques ont été à l'origine de nombreuses expériences, notamment en raison de l'amélioration fulgurante de leur sensibilité, de leur stabilité et de leur compacité (voir la revue de [Miffre *et al.*](#) [168]).

La possibilité de détecter des Ondes Gravitationnelles (OGs) avec un Interféromètre à Onde de Matière (IOM) a été suggérée pour la première fois par [Linet et Tournenc](#) [157]. Leurs calculs se fondent sur une généralisation de l'équation eikonale de l'optique géométrique. Cette méthode a été reprise et développée dans la section 3.2. Quelques années plus tard, [Stodolsky](#) [204] explore cette possibilité avec la même démarche. La décohérence induite par une OG sur un IOM a été étudiée avec cette méthode [147–149]. D'autres approches ont été considérées : généralisation de l'équation de Klein-Gordon [62], généralisation de l'équation de Dirac en espace courbe [49, 52, 53], généralisation du formalisme des matrices ABCD aux ondes de matière [50, 51].

Ces méthodes visent la description d'un cadre théorique général pour la description des effets inertiels, quantiques et gravitationnels sur les IOMs. Je préfère parler d'« interfaces » entre les théories métriques et la théorie quantique. En effet, elles ne traitent pas de l'interprétation physique du référentiel choisi pour la description d'une expérience, comme nous l'avons fait dans le chapitre 2. Bien souvent les auteurs se contentent de l'interprétation en terme de jauge, en occultant leur signification expérimentale (voir la section 2.3.1). L'utilisation de ces méthodes ne devrait être pleinement satisfaisante qu'après une clarification de la signification expérimentale du référentiel en relativité générale. L'ensemble constitue alors un cadre pour la gravitation expérimentale, fournissant les outils d'interprétation nécessaires aux expériences sur la gravitation.

La controverse au sujet du calcul de la sensibilité d'un IOM aux OGs illustre bien ce propos. Je vais présenter cette controverse dans les détails, pour montrer comment internet et l'apparition de sites de publications libres comme arXiv changent les pratiques scientifiques. D'une certaine façon, arXiv a remplacé les correspondances d'auparavant (voir section 3.1.1), et rend les débats d'idées beaucoup plus visibles à la communauté scientifique.

Controverse En décembre 2003, [Chiao et Speliotopoulos](#) déposent deux articles [68, 69] sur arXiv, dans lesquels ils proposent l'expérience MIGO, « Matter-wave Interferometric Gravitational-wave Observatory ». L'un est publié en avril 2004 dans le *Journal of Modern Optics* [69], l'autre en octobre 2004 dans un proceeding [68]. Ils concluent dans ces articles que la sensibilité d'un IOM dépend du système de coordonnées choisi, et que l'IOM est plus sensible aux OGs de très haute fréquence et avec des atomes lents. Avant cette proposition, [Bordé](#) applique la théorie généralisée des matrices ABCD à un IOM de type Mach-Zehnder. Son article est reçu en septembre 2003 par *General Relativity and Gravitation* et publié en mars 2004. Il interprète le système de coordonnées en terme de jauge*, et montre que la différence de phase d'un IOM est invariante de jauge.

Le point soulevé par [Chiao et Speliotopoulos](#) suscite pourtant une polémique parmi la communauté scientifique ; d'autant plus que les auteurs insistent dans un article déposé en juin 2004 sur arXiv [200], qui ne sera d'ailleurs jamais publié. De plus, [Foffa et al.](#) reprennent l'idée de MIGO et confirment la présence d'un terme proportionnel à la fréquence de l'OG dans la différence de phase d'un IOM, dans un article déposé en juillet 2004 sur arXiv [111] (et reçu le même mois par *Physical Review D*). La réponse ne se fait pas attendre : [Roura et al.](#) déposent un article en août 2004 sur arXiv [190]. Ils montrent explicitement que, si l'on définit soigneusement l'expérience étudiée, le calcul de la différence de phase ne dépend pas des coordonnées choisies. De plus, ils ne trouvent pas de terme proportionnel à la fréquence de l'OG. La réponse de [Foffa et al.](#) est presque immédiate : ils la déposent en septembre 2004 sur arXiv [112], dans un nouvel article. Ils confirment que la différence de phase ne dépend pas des coordonnées choisies, mais maintiennent le fait qu'un terme proportionnel à la fréquence des OGs apparaît. Il faut noter que les trois références de cet article ne sont que des articles déposés sur arXiv. En décembre 2004, [Roura et al.](#) révisent leur article déposé en août : ils ajoutent une annexe pour répondre à l'article déposé en septembre par [Foffa et al.](#). Ils leurs reprochent de ne pas avoir pris en compte la différence de phase initiale. [Roura et al.](#) décident de publier leur article dans *Physical Review D*, qui reçoit leur manuscrit en juin 2005†. [Foffa et al.](#) corrigent alors leur article initial, déposé en juillet 2004, pour prendre en compte la critique de [Roura et al.](#). Le manuscrit qu'ils ont envoyé à *Physical Review D* en juillet 2004 est révisé en novembre 2005, et révisé sur arXiv le 9 janvier 2006. Enfin il est publié dans *Physical Review D* le 19 janvier 2006 [111]. Les auteurs trouvent toujours le terme proportionnel à la fréquence des OGs.

Ayant suivi cette controverse par arXiv interposé, et voyant qu'il n'y a toujours pas de consensus, nous décidons, avec Marie-Christine Angonin et Philippe Tourrenc, d'aborder le problème avec nos propres approches. Nous envoyons notre manuscrit à *Physics Letters A*.

*La même interprétation est faite par [Lamine](#) [147]. Nous critiquons cette approche dans la section 2.3.1.

†Il faut noter qu'il se passe presque un an entre la dépose de l'article sur arXiv et sa soumission à *Physical Review D*. ArXiv a donc eu ici un rôle constructif, comme lieu de discussion entre deux équipes de chercheurs.

Il est reçu en mars 2006, et publié en ligne en mai 2006 [92]. Entre temps est publié l'article de [Roura et al.](#), dans *Physical Review D*, en avril 2006*. Dans notre article nous expliquons que la controverse pourrait avoir comme origine une confusion entre plusieurs expériences différentes, ainsi qu'une interprétation physique incorrecte des systèmes de coordonnées en relativité générale. C'est ce que nous exposerons tout au long de ce chapitre. On peut également lire la contribution de [Tino et Vetrano](#) [208], article publié en avril 2007, inspiré d'une présentation datée de février 2004 [225], à laquelle a collaboré Ch. [Bordé](#). Ceux-ci reprennent l'interprétation en terme de jauge, et ajoutent en annexe une discussion sur les systèmes de coordonnées.

En conclusion, on peut se demander si arXiv ajoute à la richesse de la discussion entre physiciens, ou bien à sa confusion. Mon avis est que cette discussion vue de l'extérieur a été une source de confusion. Il aurait été plus prudent qu'elle reste privée comme au temps des correspondances, ou bien au moins que l'on attende qu'un article soit publié pour le critiquer dans une communication publique. C'est pourquoi nous avons pour principe de ne mettre sur arXiv nos articles qu'une fois publiés dans un journal à comité de lecture.

5.1.2 Des atomes rapides

Dans cette section, je vais montrer simplement pourquoi les atomes doivent être rapides dans le cas de la détection des OGs, alors qu'il est préférable qu'ils soient lents pour être sensibles aux effets inertiels. Cette discussion fait suite à celle de la section 3.2.3 : nous la spécialisons au cas des IOMs. Nous rappelons que les effets inertiels et gravitationnels sont résumés dans la perturbation $K_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique. La métrique est alors de la forme (2.49). L'ordre de grandeur de la différence de phase $\Delta\Phi$ en sortie de l'IOM est calculé avec la méthode décrite dans la section 3.2.2. Une accélération γ est modélisée, au premier ordre, par une perturbation de la métrique $K_{00} \sim 2\gamma L/c^2$, où L est la taille de l'IOM. Nous obtenons alors

$$\Delta\phi \sim \frac{ma}{\hbar} \cdot \frac{\mathcal{A}}{v}, \quad (5.1)$$

où \mathcal{A} est l'aire de l'IOM, et v et m sont la vitesse et la masse des atomes. Nous déduisons immédiatement que pour avoir une bonne sensibilité à l'accélération, l'aire de l'interféromètre doit être aussi grande que possible, et les atomes aussi lents que possible.

Dans un interféromètre de Ramsey-Bordé [48, 185], les atomes sont séparés par un pulse laser (annexe A). L'angle de séparation θ des atomes est plus grand quand les atomes sont lents. Ainsi, à longueur de bras égale, l'aire \mathcal{A} est plus grande quand les atomes sont lents, et la sensibilité de l'interféromètre à l'accélération est meilleure. Cette conclusion vaut aussi

*Je trouve étrange que deux articles contradictoires, ceux de [Foffa et al.](#) [111] et de [Roura et al.](#) [190], paraissent dans le même journal, presque en même temps...

pour un gyromètre atomique. Une vitesse angulaire Ω est modélisée, au premier ordre, par une perturbation $K_{0i} \sim \Omega L/c$. Nous obtenons alors

$$\Delta\phi \sim \frac{m\Omega}{\hbar} \cdot \mathcal{A} . \quad (5.2)$$

Nous en déduisons que l'aire de l'interféromètre doit être grande. Il y a alors deux approches possibles. Nous pouvons construire un grand interféromètre, comme celui de [Gustavson *et al.* \[131\]](#), pour maximiser l'aire ; les atomes doivent alors être rapides pour ne pas tomber. Si nous voulons un interféromètre compact, il faut que les atomes soient lents. C'est l'idée principale du gyromètre décrit par [Canuel *et al.* \[63\]](#).

Mais cette conclusion n'est plus valable dans le cas des OGs. En effet, pour $K_{ij} \sim h^E$, où h^E est l'amplitude de l'OG, nous obtenons

$$\Delta\phi \sim \frac{mh^E}{\hbar} \cdot \frac{\mathcal{A}}{T} , \quad (5.3)$$

où T est le temps de vol d'un atome dans un bras de l'interféromètre. Ici, pour une aire donnée, le temps de vol doit être aussi court que possible. Or, pour une même aire d'interféromètre, le temps de vol de l'atome dans un bras de l'interféromètre est inversement proportionnel à sa vitesse : celle-ci doit donc être aussi grande que possible. Autrement dit, il vaut mieux avoir un bras long et une vitesse élevée qu'un interféromètre compact avec des atomes lents. De ce point de vue, l'IOM décrit par [Gustavson *et al.* \[131\]](#) est mieux adapté à la détection des OGs que celui décrit par [Canuel *et al.* \[63\]](#). Cependant sa sensibilité est bien trop faible pour la détection des OGs.

Pour un interféromètre de Ramsey-Bordé, la relation liant l'aire de l'interféromètre au vecteur d'onde k du laser est $\mathcal{A} = \hbar k v T^2 / m$. Les relations (5.1), (5.2) et (5.3) s'écrivent alors respectivement $\Delta\phi \sim k a T^2$, $\Delta\phi \sim k \Omega v T^2$ et $\Delta\phi \sim k h^E v T$.

5.2 Les interféromètres libres

Nous allons traiter les IOLs et les IOMs de façon formellement identique, grâce à la méthode décrite en section 3.2.2 : nous décomposons le déphasage en un déphasage classique $(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$, plus un déphasage dû à la perturbation gravitationnelle sur la propagation de la phase. Dans le but de faire des calculs pour différents interféromètres, nous décrivons le système expérimental comme un ensemble de N événements :

$$\{X_n\}_{0 \leq n < N} = \{(t_{X_n}, \vec{x}_{X_n})\}_{0 \leq n < N} .$$

Par commodité, nous définissons aussi $X_{-1} = X_{N-1}$ et $X_N = X_0$. $E_{X_{n-1}X_n}$ et $\vec{p}_{X_{n-1}X_n}$ sont l'énergie et l'impulsion de la particule entre les points X_{n-1} et X_n . Alors $E = \hbar\omega$

et $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ est la quadri-impulsion de la particule. $K_{\mu\nu}$ est la perturbation gravitationnelle dans le référentiel choisi. D'après la formule (3.8) :

$$\Delta\phi = \Delta\phi_o + \Delta\delta\phi, \quad (5.4)$$

où

$$\Delta\phi_o = \sum_{n=0}^{N-1} \left[t_{X_n} \cdot (\omega_{X_{n-1}X_n} - \omega_{X_nX_{n+1}}) - \vec{x}_{X_n} \cdot (\vec{k}_{X_{n-1}X_n} - \vec{k}_{X_nX_{n+1}}) \right] \quad (5.5)$$

$$\Delta\delta\phi = \frac{c^2}{2\hbar} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} p_{X_nX_{n+1}}^\mu p_{X_nX_{n+1}}^\nu \int_{t_{X_n}}^{t_{X_{n+1}}} K_{\mu\nu}(t') \frac{dt'}{E}. \quad (5.6)$$

Comme le calcul du déphasage se fait sur un chemin fermé de l'espace-temps, le résultat est indépendant du référentiel choisi.

Dans cette section, les éléments optiques sont supposés libres. Dans le cas de miroirs optiques, cela suppose qu'ils sont en chute libre, comme dans LISA, ou bien libres de leurs mouvements dans le plan de l'interféromètre, comme dans Virgo. Le cas des miroirs atomiques est plus délicat. Lorsque ce sont des miroirs physiques comme des cristaux ou bien des réseaux, la remarque est la même que pour les miroirs optiques. Lorsqu'il s'agit d'ondes lumineuses comme pour l'interféromètre de Ramsey-Bordé, ou bien d'ondes évanescentes, alors il faut étudier la perturbation induite par l'OG sur ces ondes lumineuses. Nous verrons par la suite que cette perturbation est négligeable devant celle induite par l'OG sur les atomes directement, ou bien sur la position des lasers, suivant le référentiel dans lequel on se place.

Nous nous plaçons dans le référentiel dans lequel les coordonnées des éléments optiques sont au repos*, ie. le référentiel comobile à l'expérience. Leurs vecteurs position sont alors indépendants du temps. Dans le cas où ils sont libres (ie. initialement au repos), ce sont les coordonnées d'Einstein \mathbf{x} qui sont comobiles de l'interféromètre. La perturbation du tenseur métrique est alors $K_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}^E$ (Sect. 2.3.3). Nous supposons que l'OG se propage selon l'axe $x^3 \equiv z$.

5.2.1 Interféromètre de Michelson-Morley

Dans un interféromètre de Michelson-Morley, nous supposons que l'énergie E et l'impulsion $p = \|\vec{p}\|$ des particules restent constantes sur tout le trajet de l'interféromètre. Cela suppose, pour de la matière, que l'on a une réflexion sans transfert d'impulsion. L'interféromètre est modélisé par les quatres événements A , B , C et D , qui correspondent respectivement à

*Dans le cas d'éléments optiques en chute libre, ce sont les différences de coordonnées qui sont au repos, ce qui revient finalement au même ...

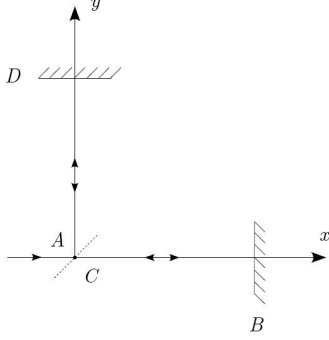


FIG. 5.1 — L'interféromètre est dans le plan (xAy) . L'onde est séparée lors de l'événement A et se recombine lors de l'événement C. A et C sont spatialement confondus.

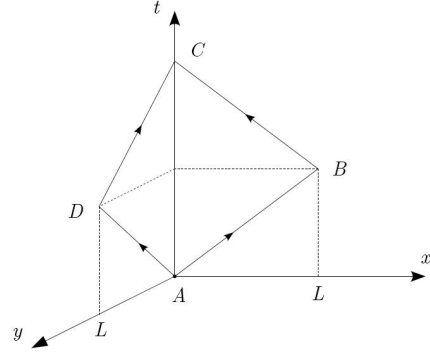


FIG. 5.2 — L'intégration se fait sur un trajet fermé de l'espace-temps : ABCDA. On remarquera le sens de parcours de l'onde.

une séparation, une réflexion, une recombinaison et une réflexion de l'onde (figure 5.1). Le chemin non perturbé de l'onde dans l'interféromètre est représenté dans l'espace-temps sur la figure 5.2. D'après les formules (5.5) et (5.6), nous obtenons alors :

$$\Delta\phi_o = 0 \quad (5.7)$$

$$\Delta\delta\phi = \frac{p^2 c^2}{\hbar E} (\mathcal{H}_+(t_C) - \mathcal{H}_+(t_A)) , \quad (5.8)$$

où \mathcal{H}_+ est une primitive de $h_+ \equiv h_{11}^E = -h_{22}^E$, la polarisation + de l'OG. Nous supposons maintenant que h_+ est une fonction sinusoïdale, où Ω est la pulsation de l'OG. De plus nous supposons que la taille de l'interféromètre selon z est beaucoup plus petite que la longueur d'onde gravitationnelle $\Lambda = 2\pi c/\Omega$. Alors $h_+(ct - z) \simeq h_+ \sin(\Omega t)$, où h_+ est une constante. Nous obtenons

$$\Delta\phi = \frac{p^2 c^2 h_+}{\hbar E \Omega} (\cos \Omega t_A - \cos \Omega t_C) . \quad (5.9)$$

Nous choisissons l'origine des temps aux événements B et D. Alors $t_A = t - L/V$ et $t_C = t + L/V$, où V est la vitesse de groupe de l'onde. De plus, nous avons $p^2 c^2 / E \hbar = 2\pi \gamma_V V / \lambda$, où λ est la longueur d'onde. Pour une onde lumineuse, $V = c$ et $\gamma_c = 1$. Pour une onde de matière, $V = v_0$, $\gamma_{v_0} = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, et λ est la longueur d'onde de de Broglie : $\lambda = 2\pi \hbar / m \gamma_{v_0} v_0$. Nous obtenons alors

$$\boxed{\Delta\phi = 4\pi h_+ \frac{V}{\Omega \lambda} \sin \frac{\Omega L}{V} \sin \Omega t} . \quad (5.10)$$

Nous obtenons formellement la même relation pour une onde lumineuse et pour une onde de matière. Cela va nous permettre de comparer facilement leurs performances respectives.

Dans le régime $\Omega L/V \ll 2\pi$, l'amplitude de $\Delta\phi$ est :

$$\widetilde{\Delta\phi} \simeq 4\pi|h_+|\frac{L}{\lambda}. \quad (5.11)$$

Cette formule est bien connue pour les IOLs [36, p. 54]. Elle reste valable pour les IOMs. Cependant, la condition $\Omega L/V \ll 2\pi$ correspond à $L \ll \Lambda$ pour un IOL, tandis qu'elle implique $L \ll \frac{v_0}{c} \cdot \Lambda$ pour un IOM.

Soyons encore plus exigeant avec la condition $\sin \Omega L/V = 1$. Nous obtenons alors $L = \pi(j + 1/2)V/\Omega$, où j est un entier positif. Comme nous voulons que l'interféromètre soit le plus petit possible, nous choisissons $j = 0$. Nous obtenons alors :

$$L = \frac{V \Lambda}{c 4} \quad (5.12)$$

$$\widetilde{\Delta\phi} = 8|h_+|\frac{L}{\lambda}. \quad (5.13)$$

Définissons T_D le temps de parcours total d'une particule dans un bras de l'interféromètre, et $T_{OG} = \Lambda/c$ la période de l'OG. Alors, la condition (5.12) équivaut à $T_D = T_{OG}/2$, ie. le temps de vol de la particule dans un bras de l'interféromètre est égal à la moitié de la période de l'OG. La différence de phase est alors maximale. Cela peut se comprendre simplement. Supposons que nous sommes dans un référentiel où l'effet de l'OG s'explique par une dilatation spatiale des bras, et suivons le trajet de la particule. Celle-ci arrive au bout du bras au bout d'un quart de période de l'OG, ie. quand la dilatation d'un des bras est maximale pour l'un, et minimale pour l'autre, puis l'onde se recombine quand les deux bras sont de la même taille. Les effets sont donc maximaux. Si la particule était plus lente, par exemple avec $T_D = T_{OG}$, les effets s'annuleraient, car l'onde serait réfléchi au moment où les deux bras feraient la même taille. C'est pourquoi nous ne gagnons pas en sensibilité avec $T_D > T_{OG}/2$. De même, si $T_D < T_{OG}/2$, la particule ne se réfléchirait pas au moment où la différence de longueur entre les deux bras serait maximale, et donc nous ne serions pas non plus à la sensibilité optimale.

Une affaire de référentiel Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer simplement l'erreur de Foffa *et al.* [111]. Ces auteurs ne choisissent pas de coordonnées comobiles pour décrire leur expérience, ce qui complique les calculs. En effet, ils choisissent de décrire leur protocole expérimental dans ce qu'ils appellent les coordonnées « rigides ». Les coordonnées « rigides » des éléments optiques ne sont pas constantes lors du passage de l'onde gravitationnelle. Nous avons vu dans la section 3.2.2 que pour calculer t_A , le temps départ de la particule,

il faut résoudre une équation faisant intervenir les trajectoires des deux éléments optiques, et le temps d'arrivée t_B de la particule. Dans les coordonnées « rigides », le « mouvement » des deux éléments optiques introduit un décalage dans le temps départ de la particule de l'ordre de $|h|$, l'amplitude de l'OG, pour chacune des trajectoires de l'interféromètre. Cela implique $\Delta\phi_o \neq 0$. Cependant, comme les composantes de la perturbation de la métrique dans les coordonnées « rigides » sont différentes de ses composantes dans les coordonnées comobiles, nous avons aussi un terme supplémentaire dans $\Delta\delta\phi$, qui doit annuler celui qui apparaît dans $\Delta\phi_o$. Finalement, nous devons obtenir le même résultat dans les deux systèmes de coordonnées. Le problème est que [Foffa *et al.*](#) ne prennent pas en compte la contribution due à $\Delta\phi_o$. Ils obtiennent alors un terme supplémentaire non physique. C'est ce que montrent en détail [Roura *et al.*](#) [190, voir en particulier l'annexe B]. Ce terme supplémentaire, qui est donc un artefact, est le terme proportionnel à la fréquence de l'onde gravitationnelle (voir section 5.1.1).

5.2.2 IOMs versus IOLs

Dans Virgo ou LISA (Sect. 1.2.2), les sources sont des lasers infrarouges Nd :YAG dont la longueur d'onde est $\lambda \simeq 10^{-6}$ m. Diminuer la longueur d'onde du laser pour augmenter la différence de phase (voir la relation (5.11)) implique des difficultés techniques difficilement surmontables sur la stabilité des lasers et la qualité des optiques. En revanche, pour un IOM, baisser la longueur de de Broglie revient à accélérer les particules. Par exemple, dans l'interféromètre atomique décrit par [Keith *et al.*](#) [141], la longueur d'onde est $\lambda \simeq 16$ pm. Ainsi, la différence de phase pour un IOM peut être beaucoup plus grande que dans un IOL, et la sensibilité pourrait être meilleure. Malheureusement, cette conclusion n'est pas valable si l'on considère que le signal de l'interféromètre est limité par le bruit de grenaille. La différence de phase minimale pouvant être détectée est

$$\widetilde{\Delta\phi} \sim \frac{1}{2\sqrt{\dot{N}t}}, \quad (5.14)$$

où \dot{N} est le flux de particules sur le détecteur et t est le temps d'intégration. Le flux atomique dans l'expérience décrite par [Keith *et al.*](#) [141] est de seulement 70 s^{-1} , ce qui est très faible. Dans l'expérience de [Gustavson *et al.*](#) [131], le flux atomique est de 10^{11} s^{-1} , pour une vitesse de 290 m.s^{-1} (ie. $\lambda \simeq 10 \text{ pm}$). Un tel flux reste cependant très faible devant le flux photonique de Virgo qui est de l'ordre de 10^{23} s^{-1} [184]. Ainsi les IOMs d'une taille de l'ordre du mètre doivent être considérablement améliorés pour pouvoir se comparer avec les IOLs terrestres kilométriques.

Cependant, le flux effectif de LISA peut être estimé à environ 10^8 s^{-1} [101, p. 60]. C'est beaucoup plus faible que le flux effectif de Virgo, mais aussi plus faible que les meilleurs flux

atteints dans les IOMs. Ainsi, il semble plus facile d'atteindre avec un IOMs la sensibilité de LISA plutôt que celle de Virgo.

Nous supposons maintenant que la détection est uniquement limitée par le bruit de grenaille, et que les temps d'intégration pour les IOMs et les IOLs sont égaux. Nous obtenons alors la condition pour que les IOMs atteignent la même sensibilité que les IOLs, grâce aux formules (5.11) et (5.14) :

$$\gamma v_0 L_{\text{om}} \sim \frac{2\pi\hbar L_{\text{ol}}}{m\lambda_{\text{ol}}} \sqrt{\frac{\dot{N}_{\text{ol}}}{\dot{N}_{\text{om}}}} \quad (5.15)$$

où les indices $_{\text{om}}$ et $_{\text{ol}}$ indiquent respectivement les caractéristiques du IOM et du IOL. Sur les figures 5.3 et 5.4 nous représentons les caractéristiques nécessaires à un IOM pour atteindre respectivement les sensibilités de Virgo et de LISA. Ces courbes sont tracées d'après la formule (5.15) pour la masse du Césium. v_0 , L_{ol} et \dot{N}_{om} sont respectivement la vitesse de groupe initiale de l'onde de matière, la longueur du bras de l'IOM et le flux de particules sur le détecteur. Le point caractéristique de l'interféromètre de [Gustavson *et al.* \[131\]](#) a été représenté sur les deux figures. Il faut cependant noter que ce n'est pas un interféromètre de Michelson-Morley.

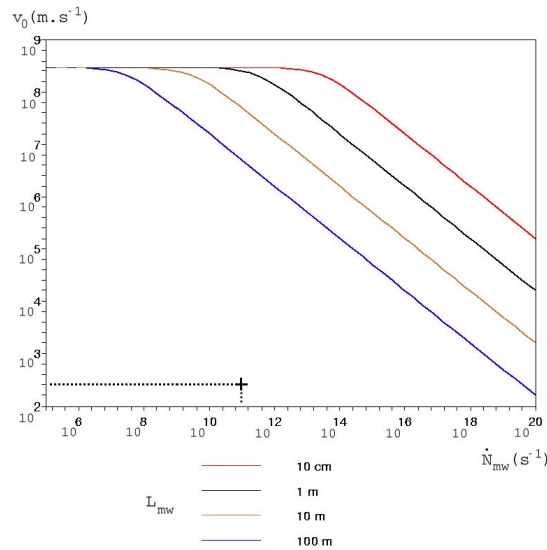


FIG. 5.3 – Caractéristiques nécessaires à un IOM pour atteindre la sensibilité de Virgo.

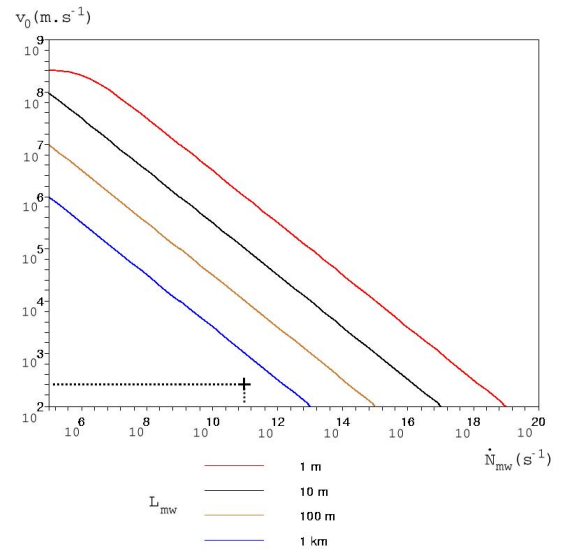


FIG. 5.4 – Caractéristiques nécessaires à un IOM pour atteindre la sensibilité de LISA.

Il apparaît clairement que la vitesse doit être très grande pour atteindre la sensibilité de Virgo. Il paraît actuellement difficile, à des vitesses relativistes, de séparer le faisceau de matière en gardant sa cohérence. En effet, nous avons vu que, pour des atomes, la séparation du faisceau est d'autant plus petite que leur vitesse est grande. Une idée serait d'accélérer les

atomes dans les bras de l'interféromètre après les avoir séparés, puis de les ralentir avant de les réfléchir. Par exemple, dans GANIL*, il est possible d'obtenir un faisceau d'ions atteignant des vitesses de l'ordre de $c/2$, avec un flux de l'ordre de $2,6 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Cependant, il faudrait que les variations de vitesse dans les deux bras de l'interféromètre soient identiques, ce qui paraît difficilement réalisable. Il y a d'autres voies pour améliorer les IOMs vis-à-vis de la détection d'OG :

- Augmenter le flux de matière : cependant, ce n'est pas le paramètre le plus efficace car il apparaît comme la racine du flux dans la relation (5.15).
- Augmenter la masse des particules : cette voie est suivie par Arndt *et al.* [27], qui font interférer des molécules. Cependant le flux reste très faible.
- Augmenter la longueur du bras : dans cette option, nous sommes limités sur Terre par la masse des atomes. De plus, nous perdons l'avantage de la compacité, qui permet de limiter plus facilement les divers bruits, notamment le bruit thermique.

Sur la figure 5.4, nous voyons qu'il est plus facile pour un IOM d'atteindre la sensibilité de LISA, car la vitesse requise est beaucoup plus faible. Pour atteindre la sensibilité de LISA avec une vitesse thermique et un flux de 10^{12} s^{-1} , il faudrait un bras long d'environ un kilomètre. Cela nous montre l'intérêt d'une cavité à onde matière, qui serait l'équivalent d'une cavité Fabry-Perot. Pour un interféromètre d'un mètre de long, il faudrait alors environ mille allers-retours dans chaque bras pour atteindre la sensibilité de LISA. Nous sommes loin de savoir fabriquer une telle cavité (on peut se référer aux articles [34, 35, 234]). Mais, au moment du lancement de LISA, prévu pour 2018, on ne peut pas exclure la possibilité d'avancées positives dans ce domaine.

5.3 Les interféromètres rigides

Dans un IOM, les éléments optiques sont reliés « rigidement », bien que le concept de rigidité ne soit pas relativiste. En effet, si la taille de l'expérience est beaucoup plus petite que la longueur d'onde gravitationnelle ($L \ll \Lambda$), il est possible de construire une théorie de l'élasticité relativiste, dont l'interprétation dans les coordonnées de Fermi est similaire à la théorie de l'élasticité newtonienne [36, pp. 39-47]. C'est notamment le point de départ pour l'étude de détecteurs tels que les barres de Weber.

Dans cette section, nous supposons donc que les coordonnées de Fermi sont comobiles des interféromètres rigides, ie. les coordonnées de Fermi des éléments optiques d'un interféromètre rigide sont au repos lors du passage d'une OG. Il est alors clair qu'en faisant cela nous ne définissons pas la même expérience que dans la section précédente.

Nous rappelons que l'origine spatiale du référentiel de Fermi (section 2.3.3) est prise au

*Grand Accélérateur National d'Ions Lourds

centre de masse du détecteur. Nous supposons que la ligne d'univers du centre de masse est une géodésique, ie. l'*apparatus* ne subit ni accélération, ni rotation. La métrique est alors donnée par la formule (2.90). La transformation des coordonnées d'Einstein aux coordonnées normales de Fermi est donnée par les relations (2.89).

5.3.1 Discussion sur les coordonnées « rigides »

Ashby et Dreitlein [29] introduisent de nouvelles coordonnées \mathbf{x}' avec la transformation de coordonnées

$$\begin{cases} x^r = x'^r - \frac{1}{2}h_s^r x'^s \\ x^a = x'^a, \end{cases} \quad (5.16)$$

où \mathbf{x} sont les coordonnées d'Einstein. Ainsi, avec $h_s^r = h_s^r(t - z)$, la métrique s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta + \dot{h}_{rs} x'^r dx'^s (dt' - dz') , \quad (5.17)$$

où $\dot{h}_{rs} = \partial h_{rs} / \partial t$. Ces coordonnées sont appelées « rigides » par Foffa *et al.* [111] et Roura *et al.* [190] car, dans le plan $z' = 0$, la distance « physique » entre deux lignes d'univers dont les coordonnées spatiales sont fixes est constante. De telles coordonnées peuvent être considérées comme des coordonnées comobiles pour des éléments optiques fixés sur un banc. C'est du moins ce qui ressort de l'article de Foffa *et al.* [111] pour un matériau à bas Q (ie. avec un amortissement interne élevé des ondes élastiques).

Seulement les coordonnées « rigides » ne sont pas les seules à montrer cette propriété. Cela reste vrai dans les coordonnées de Fermi. La question mérite donc d'être traitée en détail.

Considérons un élément fondamental $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Deux lignes d'univers voisines, A et B , ont des coordonnées spatiales x^k et $x^k + dx^k$. Le temps coordonnée nécessaire à un signal lumineux pour voler de A à B et de revenir de B vers A est dt . Le temps propre correspondant, mesuré au point A est $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = 2 [(g_{0i}g_{0j}/g_{00} - g_{ij}) dx^i dx^j]^{1/2}$. La distance radar est $d\ell = \frac{1}{2} d\tau$ (avec $c = 1$).

Avec $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}$, où $|K_{\alpha\beta}| \ll 1$, nous obtenons

$$d\ell = d\ell_0 \left(1 - \frac{1}{2} K_{ij} \gamma^i \gamma^j \right) + O(K^2) , \quad (5.18)$$

où $O(K^2)$ est un terme du deuxième ordre par rapport à $|K_{\alpha\beta}|$, $d\ell_0 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ et $\gamma^k = dx^k / d\ell_0$. Maintenant, si nous considérons les points A et B , fixes par rapport aux coordonnées « rigides » :

$$d\ell = d\ell_0 \left(1 + \dot{h}_{rs} x'^r \gamma^s \gamma^3 \right) . \quad (5.19)$$

Pour deux points A and B dans le plan $z = 0$ nous trouvons $\gamma^3 = 0$, et donc $d\ell = d\ell_0 = cte$. Mais en toute généralité (*i.e.* $\gamma^3 \neq 0$) nous obtenons

$$d\ell = d\ell_0 \left[1 + O \left(h \frac{L}{\Lambda} \right) \right] , \quad (5.20)$$

où h est l'ordre de grandeur de h_{rs} . Un calcul similaire pour les coordonnées de Fermi nous donne

$$d\ell = d\ell_0 \left[1 + O \left(h \left(\frac{L}{\Lambda} \right)^2 \right) \right] \quad (5.21)$$

Maintenant, en comparant le comportement des deux matériaux comobiles avec soit les coordonnées « rigides », soit les coordonnées de Fermi, il est clair que le deuxième est le plus rigide au sens newtonien. En fait, les coordonnées de Fermi sont les plus adaptées pour décrire un matériau rigide classique.

Lorsque la fréquence de l'OG est de l'ordre d'une fréquence de résonance du banc optique, et que le facteur de qualité du banc est assez élevé, il faut prendre en compte le mouvement des éléments optiques qui sont fixés au banc. Cependant, nous ne considérons pas le cas où les ondes de matière seraient un capteur d'élongation pour un détecteur mécanique à haute fréquence (autour de 10^3 Hz). Au contraire nous verrons que les IOMs rigides sont plutôt intéressants à basse fréquence, de la même manière que les IOMs libres.

5.3.2 L'interféromètre de Michelson-Morley

Nous étudions l'interféromètre rigide dans une configuration de Michelson-Morley. D'après la formule (2.90), la seule composante non nulle de la perturbation du tenseur métrique dans les coordonnées de Fermi \mathbf{X} , lorsque $Z = 0$, est $K_{00} = \ddot{h}_{rs} X^{\hat{r}} X^{\hat{s}} / 2c^2$. D'après les formules (5.5) et (5.6), nous obtenons après une intégration par parties :

$$\Delta\phi = \frac{E}{\hbar c^2} \left[V^2 (\mathcal{H}_+(t_C) - \mathcal{H}_+(t_A)) - 2LVh_+(t_B = t_C) \right] , \quad (5.22)$$

où nous rappelons que V est égal à la vitesse de groupe de l'onde dans le vide (c pour une onde lumineuse et V_0 pour une onde de matière).

Nous obtenons alors, avec les mêmes suppositions sur l'OG et notations que dans la section 5.2.1,

$$\boxed{\Delta\phi = 4\pi h_+ \frac{L}{\lambda} \left(\frac{V}{\Omega L} \sin \frac{\Omega L}{V} - 1 \right) \sin \Omega t} . \quad (5.23)$$

Cette formule est en accord avec celle trouvée par Roua *et al.* [190].

Nous avons supposé que $L \ll \Lambda$, ce qui implique que $\Omega L/c \ll 2\pi$. Ainsi pour un IOL, la formule (5.23) se réduit à

$$\Delta\phi_{ol} \simeq 0 . \quad (5.24)$$

Cette relation est connue : si les bras d'un IOL étaient rigides alors nous n'aurions pas de signal. Interprétons ce résultat dans les coordonnées d'Einstein. Pour l'interféromètre libre, les bras ne bougent pas (ie. les coordonnées des éléments optiques restent constantes) mais la lumière est « retardée » dans un bras et « accélérée » dans l'autre, comme si l'indice du milieu variait avec le passage de l'OG [213]. Nous obtenons donc une différence de phase non nulle. Maintenant, si nous regardons l'interféromètre rigide, l'expérience est différente : un bras se dilate pendant que l'autre se contracte, et cela compense la variation d'indice. Nous obtenons alors une différence de phase nulle.

La situation est différente pour un IOM : le mouvement des bras (dans les coordonnées d'Einstein) ne compense pas forcément la différence de phase dû à la perturbation sur la propagation de l'onde de matière. Nous pouvons distinguer deux régimes.

Premier régime $L \ll \frac{v_0}{c} \cdot \Lambda \left(\Rightarrow \frac{\Omega L}{v_0} \ll 2\pi \right)$

La relation (5.23) implique $\Delta\phi_{om} \simeq 0$. Dans ce régime, le temps de vol de la particule massive dans un bras de l'interféromètre est beaucoup plus petit que la période de l'OG (ie. $T_D \ll T_{OG}$).

Deuxième régime $\frac{v_0}{c} \cdot \Lambda \ll L \left(\Rightarrow \frac{\Omega L}{v_0} \gg 2\pi \right)$

Nous pouvons supposer que $v_0/\Omega L \ll 1$. Dans ce régime le temps de vol de la particule est beaucoup plus long que la période de l'OG (ie. $T_D \gg T_{OG}$). Alors l'amplitude de la différence de phase dans la relation (5.23) se réduit à

$$\widetilde{\Delta\phi}_{om} \simeq 4\pi|h_+|\frac{L}{\lambda} . \quad (5.25)$$

Ce régime n'a pas d'équivalent avec l'interféromètre libre, ni avec l'IOL rigide. Il faut noter que l'amplitude donnée par la relation (5.25) est la même que celle de l'IOM libre (relation (5.11)). Cependant, dans ce régime, la sensibilité de l'IOM est limitée par la condition $v_0 \ll \Omega L$.

Il apparaît alors plus judicieux de trouver une configuration de l'interféromètre pour qu'il soit sensible dans le premier régime, afin que la vitesse de la particule et donc sa sensibilité ne soit pas limitée.

5.3.3 L'interféromètre de Ramsey-Bordé

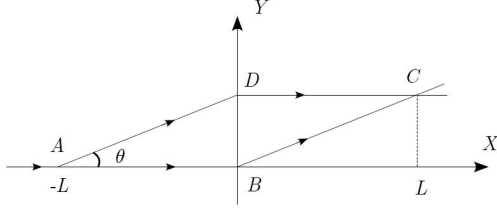


FIG. 5.5 — L'interféromètre est dans le plan (XBY). L'onde de matière est séparée lors de l'événement A et se recombine lors de l'événement C.

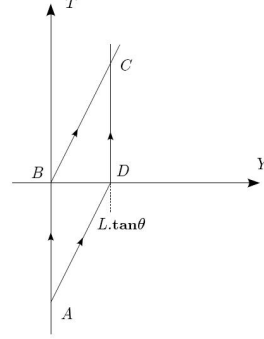


FIG. 5.6 — L'intégration se fait sur un trajet fermé de l'espace-temps : ABCDA. On remarquera le sens de parcours de l'onde de matière.

Dans cette section, nous calculons la différence de phase d'un interféromètre de Ramsey-Bordé (annexe A). Nous limitons ce calcul aux ondes de matière. De plus, nous supposons $v_0 \ll c$, ce qui est toujours le cas dans les IOMs actuels. Les configurations spatiale et temporelle de l'IOM sont définies sur les figures 5.5 et 5.6. θ est l'angle de séparation entre les deux chemins de l'interféromètre. Nous ne nous intéressons pas à la technique de séparation. Les événements B et D ont la même coordonnée temporelle, que nous fixons comme l'origine de l'axe des temps. Cela implique que si v_0 est la vitesse de groupe de l'onde sur les sections AB et DC, alors la vitesse de groupe de l'onde sur les sections AD et BC est $v_0 / \cos \theta = (v_0 + \Delta v)^{1/2}$, où $\Delta v = v_0 \tan \theta$.

Comme dans la section précédente, nous supposons que les coordonnées de Fermi \mathbf{X} définies dans la section 2.3.3 sont comobiles de l'interféromètre. De plus, nous supposons que l'OG est sinusoïdale : $h_{11}^E(ct - z) = -h_{22}^E(ct - z) \equiv h_+(ct - z) = h_+ \sin(\Omega t)$ et $h_{12}^E(ct - z) = h_{21}^E(ct - z) \equiv h_\times(ct - z) = h_\times \sin(\Omega t + \varphi_\times)$, où h_\times et φ_\times sont des constantes. La polarisation croisée de l'OG a un déphasage φ_\times par rapport à la polarisation +. Nous calculons alors la différence de phase avec les formules (5.5) et (5.6) :

$$\boxed{\Delta\phi = \Delta\phi_+ + \Delta\phi_\times}, \quad (5.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\phi_+ &= -4\pi h_+ \frac{L}{\lambda} \sin \psi \tan^2 \theta \left[\cos(\Omega t + \psi) + \frac{\sin \psi}{2\psi} \cos(\Omega t) \right] \\ \Delta\phi_\times &= -4\pi h_\times \frac{L}{\lambda} \cos \psi \tan \theta \left[\sin(\Omega t + \varphi_\times - \psi) - \frac{\sin \psi}{\psi} \tan \psi \cos(\Omega t + \varphi_\times) \right], \end{aligned}$$

où $\psi = \Omega L / 2v_0$.

Dans un interféromètre de Ramsey-Bordé usuel, des lasers font office de séparatrices et de miroirs. Lors de la première séparation en A , ils transmettent une impulsion $m\Delta v$ à la moitié des atomes le long de l'axe Y . Pour que l'angle θ soit important, il faut que les lasers transmettent une grande impulsion aux atomes lors de la séparation. Cela est très difficile car il faut le faire avec une perte minimale de cohérence. L'impulsion des photons étant $\hbar k$, nous pouvons imaginer transférer $m\Delta v = N \times \hbar k$ aux atomes. Des résultats significatifs, $N \simeq 1000$, ont été obtenus [38, 77]; cela reste très insuffisant.

De plus, il faut considérer la perturbation de l'OG sur les lasers. On peut montrer que celle-ci est négligeable (annexe A).

Nous supposons maintenant que $\theta \simeq \pi/4$ pour que $\tan \theta \simeq 1$. Nous étudions alors les deux régimes discutés dans la section précédente.

Premier régime $L \ll \frac{v_0}{c} \cdot \Lambda \left(\Rightarrow \psi = \frac{\Omega L}{2v_0} \ll 2\pi \right)$

Dans ce régime la relation (5.26) se réduit à

$$\Delta\phi \simeq -4\pi h_{\times} \frac{L}{\lambda} \sin(\Omega t + \varphi_{\times}) .$$

Nous retrouvons l'expression de la différence de phase de l'IOM libre (5.11) (ou bien de l'IOM rigide dans le second régime (5.25)) dans une configuration de Michelson-Morley, en substituant h_+ à h_{\times} . Ainsi nous avons trouvé une configuration sensible dans le premier régime, où la vitesse de groupe de l'onde de matière n'est pas limitée. Nous pouvons utiliser les figures 5.3 et 5.4 pour discuter des caractéristiques de cet interféromètre (avec $h_+ \rightarrow h_{\times}$).

Deuxième régime $\frac{v_0}{c} \cdot \Lambda \ll L \left(\Rightarrow 2\pi \ll \frac{\Omega L}{2v_0} = \psi \right)$

Dans ce régime la relation (5.26) se réduit à

$$\Delta\phi \simeq -4\pi \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot [h_+ \sin \psi \cos(\Omega t + \psi) + h_{\times} \cos \psi \sin(\Omega t + \varphi_{\times} - \psi)] .$$

La différence de phase $\Delta\phi$ est une fonction périodique du temps dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que celles des IOMs libres en configuration Michelson-Morley (5.11). Cependant, ici, nous pouvons choisir la valeur de ψ pour mesurer h_+ ou h_{\times} . C'est un point positif. Par contre, nous avons vu que la sensibilité dans ce deuxième régime est limitée aux petites valeurs de v_0 .

5.4 Le bruit thermique

Nous avons étudié jusqu'ici la limite de sensibilité des IOMs due au bruit de grenaille. Cependant, nous n'avons pas considéré le bruit thermique, qui peut être très limitant voire prépondérant. C'est pourquoi nous privilégions l'idée de construire un IOM compact, de l'ordre du mètre, pour pouvoir le refroidir à des températures très basses. Nous estimons approximativement la limite de sensibilité de l'IOM due au bruit thermique en suivant une formule de l'article [184]. Nous supposons que les éléments de l'interféromètre sont fixés sur un banc de masse $M \sim 500$ kg dont la première fréquence de résonance est $\omega_0 \sim 10^4$ s⁻¹. Nous obtenons alors :

$$h_{\min} \sim \frac{1}{L} \left(\frac{4k_B T}{MQ\omega_0^2 \Omega} \right)^{1/2},$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Avec un facteur de qualité $Q \sim 10^7$, une taille $L \sim 1$ m et une température $T \sim 10^{-2}$ K, nous trouvons $h_{\min} \sim 10^{-20}$ pour $\Omega \sim 10^{-2}$ s⁻¹.

Le bruit de grenaille et le bruit thermique ne sont pas les seuls bruits qu'il faudrait prendre en compte, mais nous pensons que ce sont les plus limitants. Michel Rouzé et Linda Mondin, du C.N.E.S., nous ont proposé de faire une demande pour une étude de R & T. Nous avons décidé que cela n'en valait la peine : les améliorations pour arriver à atteindre une sensibilité correcte pour la détection des OGs sont telles qu'une étude approfondie nous a semblé prématurée.

Cependant, je reste optimiste quand à la performance des IOMs pour les basses fréquences dans un futur proche. En effet, LISA est prévu pour un lancement en 2018. D'ici là, la recherche sur les IOMs, si elle continue avec la même qualité des quinze dernières années, aura fait d'énormes progrès.

LES CAVITÉS À ONDES DE MATIÈRE

SOMMAIRE

6.1	LA MÉTHODE DES PERTURBATIONS	119
6.2	LA PROBABILITÉ DE TRANSITION	120
6.2.1	Les expériences libres	121
6.2.2	Les expériences « rigides »	123
6.3	LA CAVITÉ CUBIQUE	125
6.3.1	La solution non perturbée	125
6.3.2	La cavité cubique libre	126
6.3.3	La cavité cubique « rigide »	128
6.4	LE POTENTIEL HARMONIQUE	131
6.4.1	La solution non perturbée	131
6.4.2	La probabilité d'absorption	132
6.5	QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS	133

L'ÉTUDE d'une cavité à ondes de matière est motivée par les récents progrès dans le piégeage et la manipulation cohérente d'atomes. En effet, avec la condensation de Bose-Einstein, nous sommes en mesure d'obtenir de grands ensembles d'atomes qui sont dans le même état quantique. Jusqu'à maintenant les Condensats de Bose-Einstein (CBE) ont surtout été étudiés pour leurs propriétés intrinsèques : la cohérence des atomes et la non-linéarité due aux collisions entre atomes font apparaître de nombreux phénomènes dont les manifestations peuvent être macroscopiques. Ils ont plus rarement été considérés comme détecteurs éventuels de phénomènes extérieurs, ce que nous allons faire dans ce chapitre pour les Ondes Gravitationnelles (OGs).

Pourtant, il y a eu de nombreuses études sur les cavités électromagnétiques en tant que détecteurs d'OGs. Cela a commencé avec la proposition de [Braginskii et Menskii \[55\]](#)

en 1971 : les auteurs ont déterminé la variation de fréquence d'un photon piégé dans un guide d'onde torique, et ont mis en évidence un phénomène de résonance. Un an plus tard, [Tourenne](#) [209] reprend le problème avec une approche différente : le champ électromagnétique est considéré sous son aspect ondulatoire. [Tourenne et Crossiord](#) [215] démontrent la nécessité d'une telle description : l'expérience décrite par [Braginskii et Menskii](#) nécessite des photons libres, ce qui implique que la dimension de l'expérience doit être très grande ($\gg 10^{17}$ m). Si nous voulons étudier une cavité de dimension raisonnable, cela impose de traiter le champ électromagnétique comme une onde. Dans les années suivantes de nombreuses études portent alors sur la résonance entre une cavité électromagnétique et une OG [54, 66, 121, 127–129, 176, 177, 210, 211]. Il y a récemment un regain d'intérêt pour le sujet et même une expérience initiée [32, 33, 59].

L'étude de la résonance entre une cavité à onde de matière et une OG, à notre connaissance, n'a jamais été faite en tant que telle*. Nous pouvons cependant trouver certains sujets s'en approchant. En 1960, [Weber](#) [230] propose de détecter les déformations induites par une OG dans un cristal piézoélectrique. Cela ouvre la voie à de nombreuses expériences dénommées détecteurs à masse résonante (lire [Fafone](#) [103] pour une revue sur le sujet). Ces détecteurs sont principalement limités par les fluctuations thermiques induites par la température T , et la qualité Q du résonateur. Cependant, si on suppose que $T/Q \rightarrow 0$, il est nécessaire de prendre en compte une théorie quantique des oscillateurs mécaniques [125, 129]. Le traitement d'un oscillateur quantique mécanique est formellement le même que celui d'une onde de matière piégée dans un potentiel harmonique, si nous négligeons les interactions entre particules.

La détection de l'OG est faite par la mesure précise du nombre de quanta excités par son passage. Cependant, la précision de la mesure est limitée par la non-commutativité de certaines observables et le principe d'incertitude qui en résulte. Pour dépasser cette limite, de nombreux auteurs ont proposé, pour observer les déformations des détecteurs à masse résonante, les principes de mesures non destructives [57, 113, 167, 207, 219, 228]. Des mesures quantiques non destructives (QND) ont ensuite été réalisées dans le domaine optique [126, 145, 155]. Depuis, les mesures QND ont des applications dans de nombreux domaines [122]. Notamment, un effort particulier est conduit dans le domaine de l'optique atomique, ce qui pourrait avoir des applications sur les cavités atomiques.

Nous définissons une cavité à ondes de matière par analogie avec une cavité électromagnétique : des ondes confinées dans un piège. Dans une cavité électromagnétique, les ondes sont des ondes électromagnétiques et le piège est généralement constitué par des miroirs, ou bien

*La description de la condensation de Bose-Einstein a été faite dans un espace courbe pour une métrique statique [19, 143, 199].

par des parois conductrices. Dans une cavité à ondes de matière, les ondes sont des ondes de matière, et les « parois » sont généralement constituées par des ondes électromagnétiques. D'un point de vue formel, notre cavité à ondes de matière est décrite par une équation d'onde plongée dans un potentiel extérieur. Ainsi, en champ faible, pour des particules non relativistes, la cavité peut être décrite par l'équation de Schrödinger généralisée (3.16), dérivée dans la section 3.3.1.

Nous allons nous attacher dans ce chapitre au changement d'état d'excitation d'une onde de matière dans une cavité lors du passage d'une OG. Nous partons de l'équation d'onde (3.16), et traitons l'OG comme une perturbation dépendant du temps. L'équation (3.16) n'est pas covariante, donc la forme de la perturbation de l'hamiltonien dépend du référentiel choisi (voir section 3.3.2). Cela n'implique pas que le résultat dépende du référentiel choisi, car il faut aussi prendre en compte la perturbation de l'OG sur le piège. Comme pour le chapitre précédent, nous prendrons un soin particulier à définir les expériences traitées. Grâce à la théorie des perturbations dépendantes du temps, nous calculerons la probabilité de l'onde de changer d'état quantique. Enfin nous l'appliquerons à deux formes de pièges : la boîte cubique et le potentiel harmonique.

6.1 La méthode des perturbations

Cette méthode consiste à traiter l'équation d'évolution d'un hamiltonien se présentant sous la forme d'un opérateur non perturbé, \mathcal{H}_0 , dont on connaît les états propres, auquel s'ajoute une perturbation \mathcal{W} qui dépend du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{W}) \Phi . \quad (6.1)$$

Pour une présentation générale de la méthode on peut se référer aux ouvrages de bases sur la mécanique quantique [151, 165]. Nous rappelons ici les résultats dont nous allons nous servir dans ce chapitre.

Soit $\overset{0}{\Phi}_k$ la fonction d'onde de l'état stationnaire d'énergie $\overset{0}{E}_k$ de l'hamiltonien non perturbé :

$$\overset{0}{\Phi}_k(x^\mu) = \varphi_k(x^i) e^{-\frac{i}{\hbar} \overset{0}{E}_k t} \quad (6.2)$$

est solution de l'équation (6.1) quand $\mathcal{W} = 0$. Nous cherchons la solution de l'équation perturbée sous la forme

$$\Phi = \sum_k a_k(t) \overset{0}{\Phi}_k . \quad (6.3)$$

En insérant les équations (6.2) et (6.3) dans l'équation (6.1), et en utilisant la relation d'orthogonalité entre les états propres, nous trouvons l'équation d'évolution des coefficients a_n :

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = \sum_k W_{nk} a_k e^{i\omega_{nk} t} , \quad (6.4)$$

où

$$\omega_{nk} = \frac{\overset{0}{E}_n - \overset{0}{E}_k}{\hbar}$$

et

$$W_{nk} = \int \varphi_n^* \mathcal{W} \varphi_k d^3x .$$

Perturbation d'un état propre Prenons comme fonction d'onde non perturbée le n -ième état stationnaire. Nous décomposons a_k sous la forme $a_k = \overset{0}{a}_k + \overset{1}{a}_k$, avec $\overset{1}{a}_k \ll 1$. La fonction d'onde perturbée s'écrit

$$\Phi_n = \overset{0}{\Phi} + \sum_k \overset{1}{a}_{kn} \overset{0}{\Phi} .$$

Nous ajoutons un indice n aux coefficients a_k pour indiquer quelle est la fonction d'onde non perturbée dont on cherche la correction. D'après l'équation (6.4), nous obtenons alors

$$i\hbar \frac{d\overset{1}{a}_{kn}}{dt} = W_{kn} e^{i\omega_{kn}t} . \quad (6.5)$$

En supposant que $a_{kn}(t=0) = \delta_{kn}$, la solution de l'équation (6.5) est

$$\overset{1}{a}_{kn}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t W_{kn}(t') e^{i\omega_{kn}t'} dt' . \quad (6.6)$$

La probabilité de transition par unité de temps depuis l'état propre d'énergie E_n vers celui d'énergie E_k ($k \neq n$) s'écrit alors

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{1}{t} \left| \overset{1}{a}_{kn} \right|^2 . \quad (6.7)$$

6.2 La probabilité de transition

Pour calculer la probabilité de transition, il faut choisir un référentiel dans lequel exprimer la perturbation du tenseur métrique. Du choix du référentiel va donc dépendre la forme de la perturbation de l'hamiltonien. Les parois de la cavité sont généralement formées par des ondes électromagnétiques. Il nous faut *a priori* étudier les effets de l'OG sur le piège électromagnétique. Nous ne le ferons pas par souci de simplicité. Nous allons commencer par étudier deux expériences de pensée. Nous supposons que l'onde de matière est piégée entre deux « parois », caractérisées formellement par des conditions aux limites. Dans un premier cas nous supposerons que ces « parois » sont immobiles dans les coordonnées d'Einstein, et nous nous placerons dans le référentiel comobile aux « parois » ; cela fixe la forme de la perturbation de la métrique. Nous qualifierons de libre ce type d'expérience.

Puis nous supposerons que les « parois » sont immobiles dans les coordonnées normales de Fermi, ce qui définit une expérience différente. Nous nous placerons alors dans le référentiel comobile aux « parois », ie. le référentiel de Fermi, et nous qualifierons de « rigide » ce type d'expérience.

Ces expériences de pensée ont le mérite de donner des ordres de grandeur, et de se rapprocher d'expériences existantes, comme par exemple celle d'un CBE piégé dans une boîte [166].

6.2.1 Les expériences libres

Nous nous plaçons dans le référentiel comobile aux parois, ie. le référentiel d'Einstein. Nous avons vu la forme de la perturbation métrique $K_{\alpha\beta}$ dans un tel référentiel dans la section 2.3.3. Nous appelons \boldsymbol{x} les coordonnées d'Einstein. Si l'onde se propage le long de la coordonnée $z \equiv x^3$:

$$K_{rs}(u) = h_{rs}(u), \quad r, s = 1, 2; \quad K_{\alpha\beta} = 0 \text{ sinon}; \quad u = t - z/c$$

avec

$$h_{11}(u) = -h_{22}(u) = h_+(u), \quad h_{12}(u) = h_{21}(u) = h_\times(u)$$

De plus, nous avons vu dans la section 3.3.2 que la perturbation de l'hamiltonien, dans ce référentiel, s'écrit

$$\mathcal{W}(u) = -\frac{\hbar^2}{2m} h^{rs}(u) \partial_r \partial_s. \quad (6.8)$$

Nous exprimons l'OG comme une superposition d'ondes monochromatiques :

$$h_c(u) = \sum_a \frac{1}{2} h_{ac} \left(e^{-i(\Omega_a u + \alpha_{ac})} + e^{i(\Omega_a u + \alpha_{ac})} \right) \quad (6.9)$$

où c est un indice qui représente la polarisation de l'onde gravitationnelle : $c \equiv +, \times$. Ω_a est la pulsation de l'OG d'indice a , et les coefficients α_{ac} sont des déphasages. Nous supposons que la longueur d'onde gravitationnelle Λ est très grande devant la dimension de la cavité le long de l'axe z , ie. $\Omega z/c \ll 1$. Nous pouvons alors considérer que la perturbation du tenseur métrique ne dépend que du temps :

$$h_c(t) = \sum_a \frac{1}{2} h_{ac} \left(e^{-i(\Omega_a t + \alpha_{ac})} + e^{i(\Omega_a t + \alpha_{ac})} \right) \quad (6.10)$$

D'après l'équation (6.8), nous obtenons alors

$$\mathcal{W}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_c h_c(t) \mathcal{Y}_c, \quad (6.11)$$

où $\mathcal{Y}_+ = \partial_{11} - \partial_{22}$ et $\mathcal{Y}_\times = 2\partial_{12}$. En intégrant l'équation (6.6) par rapport au temps nous obtenons

$$\begin{aligned}
{}_1a_{kn}(t) &= \frac{\hbar}{4m} \sum_c \int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_c \varphi_n) d^3x \\
&\times \sum_a h_{ac} \left[\frac{e^{-i\alpha_{ac}}}{\omega_{kn} - \Omega_a} \left(e^{i(\omega_{kn} - \Omega_a)t} - 1 \right) + \frac{e^{i\alpha_{ac}}}{\omega_{kn} + \Omega_a} \left(e^{i(\omega_{kn} + \Omega_a)t} - 1 \right) \right] \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme sur a contribue de façon prépondérante si $\Omega_a = \omega_{kn}$. Ce cas décrit un processus d'absorption de l'OG par la cavité car $E_k > E_n$. Lorsque $\Omega_a = -\omega_{kn}$, c'est le deuxième terme de la somme sur a qui est prépondérant, ce qui décrit un processus d'émission car $E_k < E_n$. Comme nous nous intéressons au processus d'absorption, nous négligeons le deuxième terme de la somme sur a . Nous obtenons alors la probabilité de transition par unité de temps de la cavité d'un état n vers un état k (avec $E_k > E_n$) grâce à l'équation (6.7) :

$$\begin{aligned}
P_{n \rightarrow k} &= \frac{\hbar^2}{16m^2 t} \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_c \varphi_n) d^3x \right)^* \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_d \varphi_n) d^3x \right) \\
&\times \sum_{a,b} h_{ac} h_{bd} \frac{e^{-i(\alpha_{bd} - \alpha_{ac})}}{(\omega_{kn} - \Omega_b)(\omega_{kn} - \Omega_a)} \left(e^{i(\omega_{kn} - \Omega_b)t} - 1 \right) \left(e^{-i(\omega_{kn} - \Omega_a)t} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Dans cette somme contribuent majoritairement les termes pour lesquels $\Omega_a = \Omega_b = \omega_{kn}$, c'est à dire $a = b$. Nous pouvons donc écrire, avec une bonne approximation,

$$\begin{aligned}
P_{n \rightarrow k} &= \frac{\hbar^2}{4m^2} \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_c \varphi_n) d^3x \right)^* \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_d \varphi_n) d^3x \right) \\
&\times \sum_a h_{ac} h_{ad} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega_a)t}{(\omega_{kn} - \Omega_a)^2 t}
\end{aligned}$$

Nous avons supposé, pour simplifier, que les deux polarisations de l'onde gravitationnelle sont en phase, ie. pour tout a , $\alpha_{a+} = \alpha_{a\times}$. Dans ce cas là le terme croisé entre les deux polarisations de l'onde gravitationnelle (le terme en $h_{a+}h_{a\times}$) est maximal.

Nous décrivons maintenant le spectre de l'onde gravitationnelle de manière intégrale, en remplaçant la somme

$$\sum_a h_{ac} h_{ad} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega_a)t}{(\omega_{kn} - \Omega_a)^2 t} \quad \text{par} \quad \int_0^\infty h_c(\Omega) h_d(\Omega) \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega)t}{(\omega_{kn} - \Omega)^2 t} d\Omega. \quad (6.13)$$

$h_+(\Omega)$ et $h_-(\Omega)$ sont les amplitudes spectrales des deux polarisations de l'onde gravitationnelle (en $1/\sqrt{\text{Hz}}$). Nous pouvons trouver une condition pour pouvoir les sortir de l'intégrale. Posons

$$A(\Omega) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega)t}{(\omega_{kn} - \Omega)^2 t} . \quad (6.14)$$

La fonction A possède un pic en $\Omega = \omega_{kn}$, d'autant plus fin que t est grand. Nous pouvons sortir les amplitudes h_c de l'intégrale si elles ne varient pas trop autour de la pulsation ω_{kn} . Plus grand est le temps t et meilleure est l'approximation car

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\Omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega_{kn} - \Omega) , \quad (6.15)$$

où δ est la fonction δ de Dirac. Nous pouvons définir un critère plus précis pour que l'approximation soit valide : nous demandons que la variation de h_c sur une plage de fréquence de la largeur du pic de A centré en ω_{kn} soit négligeable devant l'unité. Cette largeur est $\sim 1/t$. Notre critère pour sortir les amplitudes de l'intégrale est alors :

$$\boxed{\frac{dh_c}{d\Omega}(\omega_{kn}) \ll t} . \quad (6.16)$$

En supposant que $\omega_{kn}t \gg 1$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty A(\Omega) d\Omega = \frac{\pi}{2} . \quad (6.17)$$

La probabilité de transition par unité de temps de la cavité d'un état n vers un état k s'écrit alors :

$$\boxed{P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^2 \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_c \varphi_n) d^3x \right)^* \left(\int \varphi_k^* (\mathcal{Y}_d \varphi_n) d^3x \right) h_c(\omega_{nk}) h_d(\omega_{nk})} \quad (6.18)$$

Le calcul des deux intégrales dépend de la forme précise de la cavité. Nous les calculerons dans la section suivante dans le cas d'une boîte.

6.2.2 Les expériences « rigides »

Pour les expériences « rigides », nous nous plaçons dans le référentiel de Fermi. Nous appelons \mathbf{X} les coordonnées normales de Fermi. La perturbation \mathcal{W} de l'hamiltonien est donnée par la formule 3.19. Nous supposons que l'accélération de l'*apparatus* est nulle. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{W}(T) = \frac{mc^2}{4} \bar{h}_{jk,00}(T) X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} \quad (6.19)$$

Nous rappelons que la trajectoire du centre de masse de l'*apparatus* est $x^\alpha = f^\alpha(T)$. Nous décomposons l'OG en ondes monochromatiques (formule (6.9)). D'après la formule de changement de coordonnées (2.89), et en supposant que $\Omega z/c \ll 1$, nous obtenons :

$$\bar{h}_{c,00}(T) = \frac{1}{c^2} \ddot{h}_c(T) = -\frac{1}{c^2} \sum_a \frac{1}{2} h_{ac} \Omega_a^2 \left(e^{-i(\Omega_a f^0(T) + \alpha_{ac})} + e^{i(\Omega_a f^0(T) + \alpha_{ac})} \right) \quad (6.20)$$

Pour simplifier, nous supposons que $f^0(T) = T$, et nous écrivons la perturbation de l'hamiltonien sous la forme

$$\mathcal{W}(T) = \frac{m}{4} \sum_c \ddot{h}_c(T) F_c ,$$

où $F_+ = X^2 - Y^2$ et $F_\times = 2XY$.

Nous obtenons alors, de la même manière que précédemment, la probabilité d'absorption par unité de temps :

$$\begin{aligned} P_{n \rightarrow k} &= \frac{1}{T} \left(\frac{m}{8\hbar} \right)^2 \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (F_c \varphi_n) d^3 X \right)^* \left(\int \varphi_k^* (F_d \varphi_n) d^3 X \right) \\ &\times \sum_{a,b} h_{ac} h_{bd} \frac{\Omega_a^2 \Omega_b^2}{(\omega_{kn} - \Omega_b)(\omega_{kn} - \Omega_a)} \left(e^{i(\omega_{kn} - \Omega_b)T} - 1 \right) \left(e^{-i(\omega_{kn} - \Omega_a)T} - 1 \right) \end{aligned}$$

Nous avons supposé par souci de simplicité que pour tout a , $\alpha_{a+} = \alpha_{a\times}$. La somme sur a et b ne diverge pas en Ω car, comme nous sommes dans les coordonnées de Fermi, la pulsation Ω des ondes gravitationnelles (de la forme (6.10)) doit être très inférieure à c/ξ , où ξ est un ordre de grandeur de la taille de la cavité. Les termes prépondérants de cette somme sont donc les termes de résonance, pour lesquels $\Omega_a = \Omega_b = \omega_{kn}$. Nous pouvons écrire, avec une bonne approximation,

$$\begin{aligned} P_{n \rightarrow k} &= \left(\frac{m}{4\hbar} \right)^2 \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (F_c \varphi_n) d^3 X \right)^* \left(\int \varphi_k^* (F_d \varphi_n) d^3 X \right) \\ &\times \sum_a h_{ac} h_{ad} \frac{\Omega_a^4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega_a)T}{(\omega_{kn} - \Omega_a)^2 T} \end{aligned}$$

En remplaçant la somme sur a par une intégrale sur Ω , nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
P_{n \rightarrow k} &= \left(\frac{m}{4\hbar} \right)^2 \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (F_c \varphi_n) d^3 X \right)^* \left(\int \varphi_k^* (F_d \varphi_n) d^3 X \right) \\
&\quad \times \int_0^\infty h_c(\Omega) h_d(\Omega) \frac{\Omega^4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{kn} - \Omega)T}{(\omega_{kn} - \Omega)^2 T} d\Omega
\end{aligned} \tag{6.21}$$

En supposant que $h_c(\Omega)$ varie lentement au voisinage de la résonance, et que T devient infiniment grand, nous obtenons :

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m\omega_{kn}^2}{4\hbar} \right)^2 \sum_{c,d} \left(\int \varphi_k^* (F_c \varphi_n) d^3 X \right)^* \left(\int \varphi_k^* (F_d \varphi_n) d^3 X \right) h_c(\omega_{nk}) h_d(\omega_{nk}) \tag{6.22}$$

Si T est fini, alors nous ne pouvons pas forcément retirer $h_c(\Omega)$ de l'intégrale dans la formule (6.21), et le résultat dépend de la forme précise des amplitudes spectrales à haute fréquence. Néanmoins, la prise en compte des amplitudes à haute fréquence ne ferait qu'augmenter la probabilité de transition. Ainsi, le résultat (6.22) est une borne inférieure de la probabilité pour des temps finis.

6.3 La cavité cubique

Nous allons maintenant calculer la probabilité de transition par unité de temps pour une forme précise de cavité : la cavité cubique. Nous donnons le résultat pour les deux expériences de la section précédente. Dans l'expérience libre les parois sont supposées immobiles dans les coordonnées d'Einstein. Dans l'expérience « rigide » les parois sont supposées immobiles dans les coordonnées de Fermi. Nous commençons par rappeler les solutions stationnaires de l'hamiltonien non perturbé.

6.3.1 La solution non perturbée

Dans une cavité cubique, les solutions stationnaires de l'équation (3.16) non perturbée s'écrivent sous la forme (6.2) avec

$$\varphi_{|k\rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \prod_i \sin \frac{\pi q_i^k}{L_i} x^i$$

et

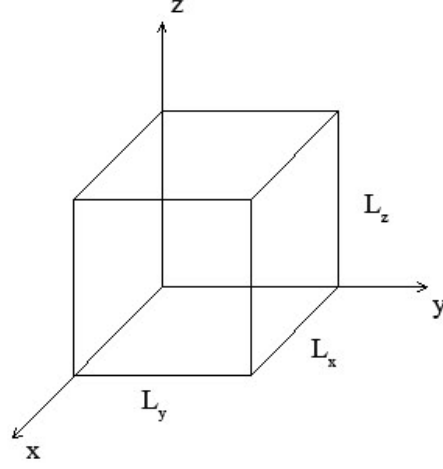


FIG. 6.1 – Cavité cubique.

$$E_{|k\rangle} = \hbar\omega_{|k\rangle} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \left(\frac{\pi q_i^k}{L_i} \right)^2 \quad (6.23)$$

Nous avons introduit $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$ et $z \equiv x^3$. $L_1 \equiv L_x$, $L_2 \equiv L_y$ et $L_3 \equiv L_z$ sont les dimensions du cube respectivement le long des axes x , y , et z . Un  tat $|k\rangle$ de la cavité est défini par les trois nombres quantiques q_1^k , q_2^k et q_3^k , qui doivent être positifs.

6.3.2 La cavité cubique libre

Nous pouvons maintenant calculer les intégrales dans la formule (6.18). D'après les relations d'orthogonalité entre les fonctions propres non perturbées, il est facile de vérifier que

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (\mathcal{Y}_+ \varphi_{|n\rangle}) d^3x = 0 \text{ ssi } |k\rangle \neq |n\rangle .$$

De plus, nous trouvons que

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (\mathcal{Y}_\times \varphi_{|n\rangle}) d^3x \neq 0$$

ssi

$$\begin{cases} q_3^k = q_3^n \\ q_1^k \neq q_1^n \text{ et } q_2^k \neq q_2^n \\ (q_2^k + q_2^n) \text{ et } (q_1^k + q_1^n) \text{ sont impairs} \end{cases} \quad (6.24)$$

Ce sont les règles de sélection. Nous supposons maintenant que les règles de sélection sont respectées. Nous obtenons alors

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (\mathcal{Y}_{\times} \varphi_{|n\rangle}) d^3x = \frac{16\pi^2 q_1^n q_2^n}{L_1^2 L_2^2 L_3} \times I_1 I_2 I_3 ,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{L_1} \sin\left(\frac{\pi q_1^k}{L_1} x\right) \cos\left(\frac{\pi q_1^n}{L_1} x\right) dx = \frac{2L_1}{\pi} \frac{q_1^k}{(q_1^k)^2 - (q_1^n)^2} , \\ I_2 &= \int_0^{L_2} \sin\left(\frac{\pi q_2^k}{L_2} y\right) \cos\left(\frac{\pi q_2^n}{L_2} y\right) dy = \frac{2L_2}{\pi} \frac{q_2^k}{(q_2^k)^2 - (q_2^n)^2} , \\ I_3 &= \int_0^{L_3} \sin\left(\frac{\pi q_3^k}{L_3} z\right) \cos\left(\frac{\pi q_3^n}{L_3} z\right) dz = \frac{L_3}{2} . \end{aligned}$$

Alors

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (\mathcal{Y}_{\times} \varphi_{|n\rangle}) d^3x = \frac{32}{L_1 L_2} \frac{q_1^n q_2^n q_1^k q_2^k}{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2][(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]} . \quad (6.25)$$

Nous obtenons alors, d'après les relations (6.18) et (6.25) :

$$P_{n \rightarrow k} = 2\pi \left(\frac{8\hbar}{mL_1 L_2} \right)^2 h_{\times}^2(\omega_{kn}) \left[\frac{q_1^n q_2^n q_1^k q_2^k}{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2][(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]} \right]^2 . \quad (6.26)$$

Seule la polarisation croisée de l'onde gravitationnelle a un effet pour cette orientation de la cavité. Si l'orientation de la cavité change, le résultat est beaucoup plus compliqué, mais l'ordre de grandeur est le même.

Nous introduisons $\Delta q_i = q_i^k - q_i^n$, et calculons ω_{kn} avec la formule (6.23) :

$$\omega_{kn} = \frac{\pi^2 \hbar}{2m} \left(\frac{\Delta q_1 (2q_1^n + 1)}{L_1^2} + \frac{\Delta q_2 (q_2^n + 1)}{L_2^2} \right)$$

Supposons que $L_1 = L_2 = L$. Alors la plus petite transition possible en énergie est $E^0 = \pi \hbar^2 / 2mL^2$ (par exemple la transition $q_1^n = q_2^n = 0$, $\Delta q_1 = 1$ et $\Delta q_2 = 0$). La taille de la cavité et la masse de l'onde de matière fixent donc la fréquence minimale de l'OG qui peut être absorbée. En réalité, L_1 ne peut pas être exactement égal à L_2 . Si un tout petit écart existe entre L_1 et L_2 , alors des transitions d'énergie très inférieures à E_0 sont possibles. Par exemple, supposons que $L_2 = L_1 / \sqrt{1 - 1/x}$, alors l'énergie minimale absorbée devient $E^0 = \pi \hbar^2 / 2mL_1^2 x$ (par exemple pour la transition $q_1^n = q_2^n = 0$, $\Delta q_1 = 1$ et $\Delta q_2 = -1$).

Nous supposons maintenant que $q_1^n \gg |\Delta q_1|$ et $q_2^n \gg |\Delta q_2|$. La relation (6.26) devient :

$$P_{n \rightarrow k} = 8\pi \left(\frac{\hbar}{mL_1L_2} \cdot \frac{q_1^n q_2^n}{\Delta q_1 \Delta q_2} \right)^2 h_{\times}^2(\omega_{kn}) . \quad (6.27)$$

Pour un état initial $|n\rangle$, la probabilité de changement d'état est maximal pour $|\Delta q_1| = |\Delta q_2| = 1$, ie. pour le niveau d'énergie le plus proche. Cependant, le mode de détection doit être assez performant pour détecter un changement d'énergie très faible. La probabilité de transition augmente pour un état initial excité, ie. pour q_1^n et q_2^n grands devant 1. Il faut donc trouver un moyen d'exciter la cavité. Pour un ensemble d'atome, cette excitation doit se faire de manière cohérente. La probabilité augmente aussi pour une petite cavité et une masse faible.

6.3.3 La cavité cubique « rigide »

Calculons les intégrales de la formule (6.22). Si $q_3^k \neq q_3^n$ alors la probabilité de changement d'état est nulle. Nous supposons donc dans toute cette section que $q_3^k = q_3^n$. C'est notre première règle de sélection. Les autres règles sont plus compliquées que dans l'expérience libre. Nous allons d'abord calculer les intégrales contenant F_+ , puis celles contenant F_{\times} .

Intégrales contenant F_+ Nous avons :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (X^2 \varphi_{|n\rangle}) d^3X \neq 0 \text{ ssi } q_2^k = q_2^n \text{ et } q_3^k = q_3^n .$$

Si en plus $q_1^k \neq q_1^n$, nous obtenons :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (X^2 \varphi_{|n\rangle}) d^3X = \frac{8L_1^2}{\pi^2} (-1)^{q_1^k + q_1^n} \frac{q_1^k q_1^n}{[(q_1^k)^2 - (q_1^n)^2]^2} . \quad (6.28)$$

De même, nous avons :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (Y^2 \varphi_{|n\rangle}) d^3X \neq 0 \text{ ssi } q_1^k = q_1^n \text{ et } q_3^k = q_3^n .$$

Si en plus $q_2^k \neq q_2^n$, alors :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (Y^2 \varphi_{|n\rangle}) d^3X = \frac{8L_2^2}{\pi^2} (-1)^{q_2^k + q_2^n} \frac{q_2^k q_2^n}{[(q_2^k)^2 - (q_2^n)^2]^2} . \quad (6.29)$$

Intégrales contenant F_{\times} Nous avons :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (XY \varphi_{|n\rangle}) d^3X \neq 0$$

ssi

$$\begin{cases} q_3^k = q_3^n \\ q_1^k \neq q_1^n \text{ ou } q_2^k \neq q_2^n \\ (q_2^k + q_2^n) \text{ et } (q_1^k + q_1^n) \text{ sont impairs} \end{cases} \quad (6.30)$$

Nous supposons ces critères vérifiés, et distinguons les trois cas suivants :

– si $q_1^k \neq q_1^n$ et $q_2^k \neq q_2^n$, alors :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (F_{\times} \varphi_{|n\rangle}) d^3 X = \frac{128 L_1 L_2}{\pi^4} \frac{q_1^k q_1^n q_2^k q_2^n}{[(q_1^k)^2 - (q_1^n)^2]^2 [(q_2^k)^2 - (q_2^n)^2]^2} . \quad (6.31)$$

– si $q_1^k \neq q_1^n$ et $q_2^k = q_2^n$, alors :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (F_{\times} \varphi_{|n\rangle}) d^3 X = \frac{8 L_1 L_2}{\pi^2} \frac{q_1^k q_1^n}{[(q_1^k)^2 - (q_1^n)^2]^2} \quad (6.32)$$

– si $q_1^k = q_1^n$ et $q_2^k \neq q_2^n$, alors :

$$\int \varphi_{|k\rangle}^* (F_{\times} \varphi_{|n\rangle}) d^3 X = \frac{8 L_1 L_2}{\pi^2} \frac{q_2^k q_2^n}{[(q_2^k)^2 - (q_2^n)^2]^2} \quad (6.33)$$

Probabilité de transition par unité de temps Pour calculer la probabilité de transition par unité de temps nous supposons que la règle $q_3^k = q_3^n$ est vérifiée, et nous distinguons plusieurs cas :

– Nous supposons que

$$\begin{cases} q_1^k \neq q_1^n \text{ et } q_2^k \neq q_2^n \\ (q_2^k + q_2^n) \text{ et } (q_1^k + q_1^n) \text{ sont impairs} \end{cases}$$

Les intégrales en F_+ sont nulles dans ce cas. Nous obtenons alors, d'après les formules (6.22) et (6.31) :

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{32 m \omega_{kn}^2 L_1 L_2}{\pi^4 \hbar} \right)^2 h_{\times}^2(\omega_{kn}) \left[\frac{q_1^n q_2^n q_1^k q_2^k}{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2]^2 [(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]^2} \right]^2 .$$

Or, d'après la formule (6.23) :

$$\omega_{kn}^2 = \frac{\pi^4 \hbar^2}{4 m^2} \left[\frac{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2]^2}{L_1^4} + \frac{[(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]^2}{L_2^4} + 2 \frac{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2] [(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]}{L_1^2 L_2^2} \right] .$$

D'où :

$$P_{n \rightarrow k} = 2\pi \left(\frac{8\hbar}{mL_1L_2} \right)^2 h_{\times}^2(\omega_{kn}) \left(q_1^n q_2^n q_1^k q_2^k \right)^2 \left[\left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2 \frac{1}{2[(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]^2} + \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \frac{1}{2[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2]^2} + \frac{1}{[(q_1^n)^2 - (q_1^k)^2]^2 [(q_2^n)^2 - (q_2^k)^2]^2} \right]^2 \quad (6.34)$$

Pour obtenir une formule plus simple, nous supposons que $q_1^n \gg |\Delta q_1|$ et $q_2^n \gg |\Delta q_2|$. La formule (6.34) se réduit alors à :

$$P_{n \rightarrow k} = 2\pi \left(\frac{\hbar}{mL_1L_2} \right)^2 h_{\times}^2(\omega_{kn}) \left[\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{q_1^n}{\Delta q_2} + \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{q_2^n}{\Delta q_1} \right]^4. \quad (6.35)$$

Comme pour le résultat de l'expérience libre, la probabilité est maximal pour les niveaux d'énergie les plus proches. De plus, les ordres de grandeur sont les mêmes.

- Nous supposons que $q_1^k \neq q_1^n$ et $q_2^k = q_2^n$. Alors :

$$w_{kn}^2 = \left(\frac{\hbar\pi^2}{2mL_1^2} \right)^2 \left[(q_1^k)^2 - (q_1^n)^2 \right]^2$$

D'après les formules (6.22), (6.28) et (6.32), nous obtenons alors :

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi^5}{8} \left(\frac{\hbar}{mL_1^2} \cdot (\Delta q_1 + q_1^n) q_1^n \right)^2 \left[h_{+}(\omega_{kn}) - \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{q_1^k + q_1^n} \right) \frac{L_2}{L_1} \cdot h_{\times}(\omega_{kn}) \right]^2. \quad (6.36)$$

- Nous supposons que $q_1^k = q_1^n$ et $q_2^k \neq q_2^n$. Alors :

$$w_{kn}^2 = \left(\frac{\hbar\pi^2}{2mL_2^2} \right)^2 \left[(q_2^k)^2 - (q_2^n)^2 \right]^2$$

D'après les formules (6.22), (6.29) et (6.33), nous obtenons alors :

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi^5}{8} \left(\frac{\hbar}{mL_2^2} \cdot (\Delta q_2 + q_2^n) q_2^n \right)^2 \left[h_{+}(\omega_{kn}) + \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{q_1^k + q_1^n} \right) \frac{L_1}{L_2} \cdot h_{\times}(\omega_{kn}) \right]^2. \quad (6.37)$$

Tous les autres cas résultent en des probabilités de transition nulles.

Dans la formule (6.34), nous reconnaissons le terme (6.26) de l'expérience libre. Tous les termes supplémentaires sont dus au fait que les mouvements des parois ne sont pas les mêmes dans les deux expériences.

Il est intéressant de noter que contrairement à l'expression (6.35), Δq_i intervient positivement dans les probabilités (6.36) et (6.37), ie. la probabilité est plus grande pour des transitions d'énergie élevée. Dans le dernier cas étudié nous obtenons, pour $\Delta q_2 \gg q_2^n$,

$$\omega_{kn} = (\Delta q_2)^2 \cdot \omega_0 ,$$

où $\omega_0 = \omega_{|0,1,0\rangle}$. Les probabilités (6.36) et (6.37) ne sont pourtant pas valable pour Δq_2 aussi grand que l'on veut. En effet, il faut se souvenir que dans les coordonnées de Fermi, l'ordre de la résonance est limité à cause de la condition $\omega_{kn} \ll c/L_2$.

6.4 Le potentiel harmonique

6.4.1 La solution non perturbée

Le hamiltonien non perturbé s'écrit pour un potentiel harmonique à trois dimensions :

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \sum_i \frac{1}{2}m\omega^i X^i .$$

Nous choisissons de se mettre dans le référentiel de Fermi pour étudier la cavité harmonique. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte les perturbations du potentiel harmonique dans le hamiltonien perturbé \mathcal{W} . Celles-ci dépendent de la nature précise du piège harmonique (configuration, piège magnétique, piège optique...). Si un champ électromagnétique constant est présent dans le piège (par exemple pour un piège de Ioffe-Pritchard), alors cela peut induire des corrections non négligeables. Ces corrections seront cependant comparables aux effets déjà pris en compte et ne changent pas les ordres de grandeurs calculés. Si l'énergie potentielle est nulle au centre du piège, alors, en faisant un développement limité du potentiel, nous pouvons montrer que les corrections sont plus petites que les effets pris en compte. Par la suite nous négligerons les perturbations du potentiel harmonique.

Nous introduisons les coefficients β^i , qui ont la dimension de l'inverse d'une longueur, qui caractérisent le piège harmonique :

$$\beta^i = \sqrt{\frac{m\omega^i}{\hbar}} .$$

Les fonctions d'ondes stationnaires solutions de l'équation d'onde non perturbée sont de la forme (6.2), avec

$$\varphi_{|k\rangle} = \prod_i \left(\frac{(\beta^i)^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{q_i^k} (q_i^k)!}} \cdot e^{-\frac{\beta^i X^i}{2}} H_{q_i^k}(\beta^i X^i) ,$$

et

$$E_{|k\rangle} = \hbar \sum_i \left(q_i^k + \frac{1}{2} \right) \omega^i .$$

Les fonctions H_n sont les polynômes d'Hermite.

Un état $|k\rangle$ de la cavité est représenté par ses trois nombres quantiques, q_1^k , q_2^k et q_3^k , qui doivent être positifs ou nuls. Seul l'état fondamental $|0, 0, 0\rangle$ n'est pas dégénéré.

6.4.2 La probabilité d'absorption

Pour calculer les intégrales de l'équation (6.22), on se servira de la propriété suivante :

$$\forall i, 2\beta^i X^i H_n(\beta^i X^i) = 2nH_{n-1}(\beta^i X^i) + H_{n+1}(\beta^i X^i) . \quad (6.38)$$

Comme pour la cavité cubique, si $q_3^k \neq q_3^n$, alors la probabilité de changement d'état est nulle.

D'après l'équation (6.38), si $q_3^k = q_3^n$, alors

$$\int \varphi_k^*(X^r)^2 \varphi_n d^3X = \frac{\hbar}{2m\omega^r} \begin{cases} \sqrt{q_r^n (q_r^n - 1)} & \text{si } q_r^k = q_r^n - 2 \\ (2q_r^n + 1) & \text{si } q_r^k = q_r^n \\ \sqrt{(q_r^n + 2)(q_r^n + 1)} & \text{si } q_r^k = q_r^n + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

où $r = 1, 2$, et

$$\int \varphi_k^* XY \varphi_n d^3X = \frac{\hbar}{2m\sqrt{\omega^1 \omega^2}} \begin{cases} \sqrt{q_1^n q_2^n} & \text{si } q_1^k = q_1^n - 1 \text{ et } q_2^k = q_2^n - 1 \\ \sqrt{q_1^n (q_2^n + 1)} & \text{si } q_1^k = q_1^n - 1 \text{ et } q_2^k = q_2^n + 1 \\ \sqrt{(q_1^n + 1) q_2^n} & \text{si } q_1^k = q_1^n + 1 \text{ et } q_2^k = q_2^n - 1 \\ \sqrt{(q_1^n + 1)(q_2^n + 1)} & \text{si } q_1^k = q_1^n + 1 \text{ et } q_2^k = q_2^n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Par souci de simplicité, nous choisissons

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega .$$

Nous ne nous intéressons qu'à l'absorption de l'onde gravitationnelle. On peut dégager alors les règles de sélection suivantes :

$$\begin{cases} \Delta q_3 = 0 \\ (\Delta q_1 = 2 \text{ et } \Delta q_2 = 0) \text{ ou } (\Delta q_1 = 0 \text{ et } \Delta q_2 = 2) \text{ ou } (\Delta q_1 = 1 \text{ et } \Delta q_2 = 1) \end{cases}$$

Pour calculer la probabilité d'absorption par unité de temps, nous distinguons alors les trois cas suivants :

– $\Delta q_1 = 2, \Delta q_2 = 0$ et $\Delta q_3 = 0$:

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{8} \omega^2 \left[\sqrt{(q_1^n + 2)(q_1^n + 1)} - (2q_2^n + 1) \right]^2 h_+^2(2\omega) . \quad (6.39)$$

– $\Delta q_1 = 0, \Delta q_2 = 2$ et $\Delta q_3 = 0$:

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{8} \omega^2 \left[\sqrt{(q_2^n + 2)(q_2^n + 1)} - (2q_1^n + 1) \right]^2 h_+^2(2\omega) . \quad (6.40)$$

– $\Delta q_1 = 1, \Delta q_2 = 1$ et $\Delta q_3 = 0$:

$$P_{n \rightarrow k} = \frac{\pi}{8} \omega^2 (q_1^n + 1)(q_2^n + 1) h_\times^2(2\omega) . \quad (6.41)$$

Nous remarquons que β^{-1} dans le cas de la cavité harmonique joue le rôle de L , la longueur de la cavité dans le cas de la cavité cubique. Par contre, contrairement au cas de la cavité cubique, ici l'ordre de la résonance est fixé. Cependant il peut y avoir des résonances d'ordre supérieures. En effet, si on développe la métrique de Fermi (2.90) à des ordres supérieurs, alors nous obtenons des probabilités non nulles pour les ordres de résonance supérieurs. Cependant, celles-ci sont complètement négligeables devant l'ordre considéré, car à chaque ordre supérieur la probabilité est multipliée par un facteur $\hbar\omega/mc^2$.

6.5 Quelques ordres de grandeurs

Pour clore ce chapitre, nous allons donner quelques ordres de grandeurs pour les probabilités calculées. Soit $\mathcal{P}_{n \rightarrow k}$ la probabilité de transition d'un état $|n\rangle$ vers un état $|k\rangle$ de la cavité, ie. $\mathcal{P}_{n \rightarrow k} = P_{n \rightarrow k} T$, où T est le temps d'interaction entre la cavité et l'OG. Pour la cavité cubique, dans l'expérience « rigide », la formule (6.35), nous donne

$$\frac{\mathcal{P}_{n \rightarrow k}}{T} \sim 32\pi \left(\frac{\hbar}{mL^2} \right)^2 h_\times^2 \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^4 , \quad (6.42)$$

où $L \sim L_1 \sim L_2$, $q \sim q_1^n \sim q_2^n$ et $\Delta q \sim \Delta q_1 \sim \Delta q_2$.

Le temps durant lequel une cavité est stable est de l'ordre de la seconde (par exemple

pour un condensat), d'où $T \sim 1$ s. Des temps plus longs sont attendus pour des expériences spatiales [222, 223, 227].

Le facteur $(\hbar/mL^2)^2$ dépend de la masse de l'atome et de la taille de la cavité. Pour le maximiser nous pouvons choisir une petite cavité avec des atomes légers. Par exemple, pour $L \sim 1 \mu\text{m}$, et pour la masse du lithium, $(\hbar/mL^2)^2 \sim 10^9 \text{ s}^{-2}$. Cependant, comme la cavité est petite, les transitions minimales autorisées sont de l'ordre de 30 kHz, ce qui est très élevé. Si nous choisissons une cavité plus grande, avec $L \sim 100 \mu\text{m}$, alors $(\hbar/mL^2)^2 \sim 1 \text{ s}^{-2}$. La fréquence minimale autorisée est alors de l'ordre de 30 mHz, ce qui permettrait la détection à basse fréquence.

L'amplitude spectrale de l'OG est bien sûr très petite. Elle dépend de sa fréquence, mais varie généralement entre $10^{-20} \text{ Hz}^{-1/2}$, à basse fréquence, et $10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$, à haute fréquence (voir la figure 1.19 de l'introduction).

Pour avoir $\mathcal{P}_{n \rightarrow k}$ de l'ordre de l'unité, il faut donc que l'excitation de départ de la cavité soit très élevée. Suivant les différents cas considérés, il faut que $q/\Delta q \sim 10^8 - 10^{10}$. Cela semble difficilement réalisable. Nous restons cependant dans la limite non relativiste postulée dans la section 3.3.1.

D'après les formules (6.36) et (6.37), nous avons :

$$\frac{\mathcal{P}_{n \rightarrow k}}{T} \sim \frac{\pi^5}{8} \left(\frac{\hbar}{mL^2} \right)^2 h_E^2 [q(q + \Delta q)]^2, \quad (6.43)$$

où $h_E \sim h_{\times} \sim h_+$. Le facteur Δq peut être avantageux. Nous avons vu que l'ordre de la transition est limité par le fait que $w_{kn} = \Delta q^2 \omega_0 \ll c/L$. Pour une cavité de $L \sim 100 \mu\text{m}$, et pour la masse du lithium, cela implique $\Delta q \ll 10^6$. Cela n'est pas suffisant pour atteindre des probabilités de l'ordre de l'unité.

Pour la cavité harmonique, les chiffres sont encore moins optimistes. Suivant les formules (6.39), (6.40) et (6.41), nous avons

$$\frac{\mathcal{P}_{n \rightarrow k}}{T} \sim \frac{\pi}{8} h_E^2 q^2 \quad (6.44)$$

La fréquence du piège peut être choisie, mais dépasse rarement les 100 Hz lors d'une expérience. Le nombre quantique est au carré, alors qu'il était à la puissance quatre pour la cavité cubique. Il va donc falloir des excitations encore plus élevées. Nous sortons alors de l'approximation non relativiste.

Étant donné la nécessité d'une excitation très élevée de l'onde de matière dans le piège pour obtenir une probabilité de transition correcte, il nous semble que ce type de détecteur est peu prometteur. Les détecteurs résonants de grande masse ont plus de chance de fonctionner car ils sont dans des niveaux d'excitations très élevées.

CONCLUSION

CE travail de thèse a comporté deux parties. D'abord l'effort a été porté sur la définition d'un cadre théorique fournissant des outils nécessaires pour modéliser les expériences en Relativité Générale. Nous avons construit une classe de référentiels d'après l'idée développée par [Fermi](#) [105]. Les référentiels de Fermi reposent sur un critère physique : la correspondance locale entre les lois de la physique en Relativité Restreinte et en Relativité Générale. Le référentiel normal de Fermi, généralement utilisé, est une spécialisation des référentiels de Fermi qui ne repose pas sur un critère physique, mais mathématique. Nous avons montré quelle est la part d'arbitraire dans ce choix. De plus, par cette nouvelle approche, nous avons établi le lien entre des coordonnées quelconques et les coordonnées de Fermi.

Cette approche a ensuite été spécialisée aux champs gravitationnels faibles, et nous avons discuté de l'importance des coordonnées dans la description d'un protocole expérimental. Enfin, le référentiel de Fermi a été construit explicitement pour une métrique PPN et une métrique d'OG. On peut cependant remarquer que l'utilisation du référentiel de Fermi n'est pas encore pleinement satisfaisante pour la description d'un solide. Il manque une théorie de l'élasticité relativiste, avec un concept de rigidité covariant. Le référentiel de Fermi nous en donne malgré tout une bonne approximation lorsque la taille de l'expérience est très inférieure à la distance caractéristique de variation de la courbure.

Par ailleurs, l'équation de Klein-Gordon nous permet de décrire l'évolution d'une onde lumineuse et d'une onde de matière. Nous reprenons la méthode de [Lin et Turenc](#) pour décrire la phase en champ faible, puis nous donnons une généralisation de l'équation de Schrödinger en champ faible et pour des petites vitesses. Ces méthodes ne sont pas covariantes, car elles nécessitent de séparer une quantité en une quantité non perturbée, et une quantité perturbée dont la forme dépend du référentiel choisi pour l'exprimer. Cependant le résultat ne dépend pas du référentiel choisi pour effectuer les calculs. Il n'y a pas d'ambiguïté si on définit le protocole expérimental et le système de coordonnées opératoire dans lequel il est mis en œuvre.

Cette méthode constitue un premier pas vers une description systématique des expériences mettant en œuvre des ondes de matières. Un des problème encore à résoudre est celui de la prise en compte du spin de la particule. Une méthode est de partir de l'équation

de Dirac, en introduisant des spineurs [52]. On peut remarquer cependant que les effets de couplage entre le spin et la métrique sont très petits, et complètement négligeables dans le cas d'OGs.

Dans la deuxième partie du manuscrit, nous avons décrit trois expériences de physique atomique, en utilisant les outils mis en place dans la première partie. Le calcul de la sensibilité d'un interféromètre atomique à l'effet Lense-Thirring a permis de faire ressortir les principales difficultés de l'expérience. Nous avons proposé une méthode, la rotation du satellite, pour s'affranchir de la connaissance de certains paramètres expérimentaux.

Nous avons ensuite calculé la sensibilité d'un interféromètre à onde de matière aux OGs. D'après nos conclusions, les interféromètres atomiques ne pourront pas concurrencer les grands interféromètres au sol comme Virgo. Par contre, leur utilisation à basse fréquence semble plus prometteuse, leur intérêt résidant dans leur compacité. Les caractéristiques nécessaires demandent cependant un gros développement de l'optique atomique (séparatrices, cavités, laser à atome, amplification cohérente). Il n'est pas exclu qu'en 2018, lors du lancement prévu de LISA, il y ait eu de sérieuses avancées dans ce domaine, et que la discussion se présente alors différemment.

Enfin, nous avons étudié la réponse d'une cavité à onde de matière à une OG. La probabilité que l'onde de matière piégée change d'état est très faible, et dépend de l'excitation de cette dernière. Il existe une résonance entre la cavité et l'OG, mais elle n'est pas suffisante pour que l'utilisation d'un tel détecteur soit un jour intéressante.

Dans l'avenir je compte m'intéresser à la modélisation des interféromètres atomiques, et à leur utilisation pour les tests de gravitation expérimentale. Le rôle des collisions, et les bruits liés à l'environnement, nécessitent d'être modélisés. La source I.C.E. est dédiée aux tests du principe d'équivalence [175], et il existe plusieurs propositions de satellites embarquant des sources atomiques : MWEG, pour le test du principe d'équivalence, et Sagas, pour le test de la loi de la gravitation à l'échelle du Système Solaire, tout deux soutenus par le LNE-SYRTE, laboratoire que j'ai rejoint en octobre.

L'INTERFÉROMÈTRE DE RAMSEY-BORDÉ

L'interféromètre de Ramsey-Bordé est un interféromètre atomique. Le principe est le même qu'un interféromètre optique, mais les rôles de la lumière et de la matière sont inversés : l'onde de matière, qui se propage dans les bras de l'interféromètre, est séparée et réfléchiée par une onde électromagnétique (impulsion laser). Nous décrivons brièvement dans cette annexe le principe d'un interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique, ie. dont les deux bras sont symétriques. Pour plus de détails on peut lire le livre [43].

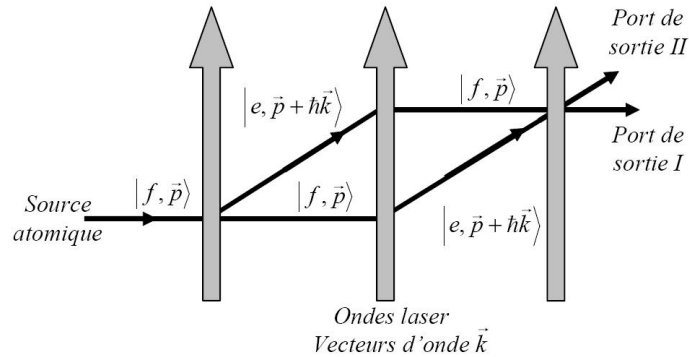


FIG. A.1 – Interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique. Dessin tiré de [153].

La géométrie de l'interféromètre est similaire à celle de l'interféromètre de Mach-Zehnder en optique. Lors de l'interaction de l'onde de matière avec le champ laser, celui-ci modifie son impulsion, mais aussi son énergie interne. Les deux états possibles de l'atome, pour simplifier, sont $|f, \vec{p}\rangle$ et $|e, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle$. e et f sont deux états internes de l'atome, \vec{p} est l'impulsion initiale de l'onde de matière et \vec{k} est le vecteur d'onde de l'impulsion laser. La première interaction avec le laser crée une superposition de deux états d'impulsions différentes, la seconde agit comme un miroir, et la troisième recombine les deux états pour les faire interférer (Fig. A.1).

En sortie de l'interféromètre, le nombre d'atomes détectés à la sortie de chaque port suit une loi

$$\begin{aligned} N_I &= N_0 \frac{1 + C \cos \Delta\Phi}{2} \\ N_{II} &= N_0 \frac{1 - C \cos \Delta\Phi}{2} . \end{aligned}$$

N_0 est le nombre d'atomes initial, C est le contraste des franges et $\Delta\Phi$ est la différence de phase en sortie de l'interféromètre.

On peut noter qu'il y a une dispersion en impulsion dans l'onde de matière car le nuage d'atome n'est pas à une température nulle. Cela dégrade le contraste des franges d'interférences. L'utilisation d'un condensat de Bose-Einstein minimise la dispersion en impulsion, mais on doit alors prendre en compte les interactions entre atomes*.

Faisceaux Raman Nous décrivons le principe de l'interaction laser pour des faisceaux Raman, pour l'atome de Césium (gyromètre du LNE-SYRTE [153]). Les deux états couplés sont les états $6S_{1/2}$, $F=3$, $m_F=0$ et $6S_{1/2}$, $F=4$, $m_F=0$. Le couplage s'effectue par le biais d'un état intermédiaire excité $|i\rangle$, proche du niveau $6P_{3/2}$ (Fig. A.2).

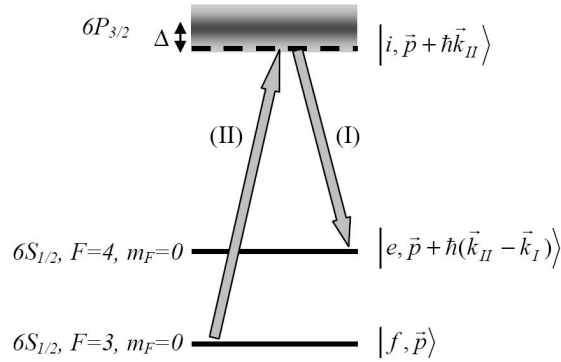


FIG. A.2 – Niveaux d'énergie utilisés pour les transitions Raman stimulées. Dessin tiré de [153].

Le laser II couple les états $|f, \vec{p}\rangle$ et $|i, \vec{p} + \hbar\vec{k}_{II}\rangle$, tandis que le laser I couple les états $|i, \vec{p} + \hbar\vec{k}_{II}\rangle$ et $|e, \vec{p} + \hbar(\vec{k}_{II} - \vec{k}_I)\rangle$. Si les deux lasers sont bien réglés (pour compenser le déplacement lumineux), cela équivaut à une transition à un photon où n'interviennent que les différences de paramètres entre chaque laser :

*D'après Choi *et al.* [70], à cause de ces interactions, un laser à atomes ne peut pas être monochromatique.

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_{II} - \omega_I \\
\vec{k} &= \vec{k}_{II} - \vec{k}_I \\
\varphi &= \varphi_{II} - \varphi_I .
\end{aligned}$$

Ainsi, on réalise une transition à deux photons optiques ($\lambda \sim 860$ nm) qui équivaut à une transition à un photon micro-onde ($\lambda \sim 3$ cm). Si les faisceaux laser sont contrapropageants, la vitesse de recul de l'atome est d'environ 7 mm.s^{-1} , plutôt que $10^{-4} \text{ mm.s}^{-1}$ pour une transition micro-onde. Le transfert d'impulsion est donc beaucoup plus efficace. C'est important pour que l'aire de l'interféromètre soit grande.

Décrivons l'atome par une onde plane progressive :

$$|\Psi\rangle = c_f(t)|f, \vec{p}\rangle + c_e(t)|e, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle ,$$

où $c_f(t) = a_f(t)e^{-i\omega_{f,p}t}$ et $c_e(t) = a_e(t)e^{-i\omega_{e,p+\hbar k}t}$, avec $\omega = E/\hbar$, E étant l'énergie totale (interne et externe) de l'état considéré. Lorsque l'onde de matière interagit au temps t avec les faisceaux Raman, ceux-ci lui « impriment » une phase $\pm\Phi = \pm(\vec{k} \cdot \vec{q} - \omega t - \varphi)$, où \vec{q} est la position du centre du paquet d'onde à l'instant t . L'évolution des coefficients c_e et c_f dépend du temps d'interaction entre l'onde de matière et l'onde lumineuse. On définit deux types d'impulsion : l'impulsion π , pour laquelle $\tau = \pi/\Omega_r^*$, et l'impulsion $\pi/2$, pour laquelle $\tau = \pi/2\Omega_r$. Pour ces deux temps d'impulsion, on montre que :

Impulsion π : Miroir	$\begin{pmatrix} c_e(t+\tau) \\ c_f(t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\Phi} \\ -ie^{i\Phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e(t) \\ c_f(t) \end{pmatrix}$	
Impulsion $\pi/2$: Séparatrice	$\begin{pmatrix} c_e(t+\tau) \\ c_f(t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}e^{-i\Phi} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}}e^{i\Phi} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e(t) \\ c_f(t) \end{pmatrix}$	

FIG. A.3 — Évolution des amplitudes de probabilités et des impulsions de l'atome. Tableau tiré de [153].

* Ω_r est la pulsation de Rabi effective, qui depend des intensités des deux lasers, du dipôle électrique de l'atome, et du désaccord Δ

Supposons que l'état initial soit $|f, \vec{p}\rangle$. Alors :

$$\begin{pmatrix} c_e \\ c_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi/2} -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{-i\Phi_1} \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{-i\Phi_{\alpha 2}} \\ e^{-i(\Phi_1 - \Phi_{\beta 2})} \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi/2} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} ie^{-i\Phi_{\alpha 2}} - ie^{-i(\Phi_{\alpha 1} - \Phi_{\beta 2} + \Phi_3)} \\ e^{-i(\Phi_{\alpha 2} - \Phi_3)} + e^{-i(\Phi_1 - \Phi_{\beta 2})} \end{pmatrix},$$

où Φ_1 , $\Phi_{\alpha 2}$, $\Phi_{\beta 2}$ et Φ_3 sont les phases des faisceaux Raman lors des trois impulsions (α représente le chemin du bas et β celui du haut). On a alors

$$P = N_{II}/N_0 = |c_e|^2 = \frac{1 - \cos \Delta\Phi}{2} = \frac{1 - \cos(\Phi_1 - \Phi_{\alpha 2} - \Phi_{\beta 2} + \Phi_3)}{2}.$$

Cette formule donne la sensibilité d'un interféromètre aux effets inertiels, si on néglige les pertes de contraste. Pour un interféromètre de Ramsey-Bordé symétrique, qui n'est soumis à aucune force d'inertie, on montre que :

$$\Delta\Phi = \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3,$$

où φ_1 , φ_2 et φ_3 sont les déphasages des trois impulsions laser.

Perturbation des faisceaux par l'OG Soit L_{ra} la distance que doit parcourir l'onde lumineuse avant d'interagir avec les atomes. Lors du passage d'une onde gravitationnelle monochromatique de pulsation Ω , la phase des faisceaux Raman est perturbée. On montre que, si $\Omega L_{ra}/c \ll 1$ (ie. $L_{ra} \ll \Lambda$), alors la perturbation sur la phase d'un faisceau Raman est :

$$\delta\Phi \lesssim 4\pi \frac{L_{ra}}{\lambda_{ra}},$$

où $\lambda_{ra} \sim 2\pi c/\omega_I \sim 2\pi c/\omega_{II}$. La différence de phase $\Delta\Phi_{ra}$ de l'interféromètre due à la perturbation de l'OG est alors $\Delta\Phi_{ra} \lesssim 4\pi L_{ra}/\lambda_{ra}$. Or, dans un interféromètre atomique, on a vu au chapitre 5 que

$$\Delta\Phi \sim 4\pi \frac{L}{\lambda_a},$$

où λ_a est la longueur d'onde de de Broglie de l'atome, et L est la taille de l'interféromètre atomique. Généralement, $\lambda_{ra} \gg \lambda_a$ (voir section 5.2.2). De plus, $L_{ra} \lesssim L$. On peut donc négliger la perturbation sur la phase des faisceaux Raman face à la perturbation calculée sur l'onde atomique dans la différence de phase.

LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN B

Nous présentons ici une approche très simplifiée de la condensation de Bose-Einstein. Pour avoir une approche plus complète on peut lire le cours de Y. Castin [65], ou bien ceux de C. Cohen-Tannoudji*. Nous considérons un ensemble de bosons sans interaction mutuelle, piégé dans une boîte de volume V , en équilibre thermodynamique à la température T . Nous allons montrer que, pour une température suffisamment basse, les particules s'accumulent dans l'état fondamental du piège.

La boîte a des arêtes de longueur L . En prenant des conditions aux limites périodiques, l'impulsion et l'énergie d'une particule piégée sont quantifiées :

$$p^i = \frac{2\pi\hbar}{L}q_i, \quad E_p = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2} \sum_{i=1}^3 (q_i)^2,$$

où q_i est un entier. L'état fondamental $|0,0,0\rangle$ a une énergie nulle. L'écart d'énergie entre le niveau fondamental et le premier niveau excité est

$$\delta E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

Le nombre moyen d'occupation \bar{N}_p du niveau d'énergie E_p est

$$\bar{N}_p = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_p} - 1}, \tag{B.1}$$

où z est la fugacité, $\beta = 1/kT$ et k est la constante de Planck. \bar{N}_p est positif pour tous les états. Comme l'énergie du fondamental est nulle, nous obtenons $z < 1$. Le nombre total N de bosons est

$$N = \sum_p \bar{N}_p = \sum_p \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_p} - 1} \tag{B.2}$$

Remplaçons la somme discrète sur les états par une intégrale :

*<http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/>

$$\sum_p \rightarrow \int_0^\infty \rho(x) dx, \quad \rho(x) = \frac{V}{\lambda_{\text{dB}}^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}, \quad (\text{B.3})$$

où $x = \beta E$, $E = p^2/2m$ et λ_{dB} est la longueur d'onde de de Broglie thermique :

$$\lambda_{\text{dB}} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.4})$$

Nous considérons N et β comme connus. Nous cherchons alors z grâce à la relation (B.2). Calculons l'intégrale

$$I(z) = \int_0^\infty \frac{\rho(x)}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

Nous obtenons

$$I(z) = \frac{V}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2}(z),$$

où

$$g_{3/2}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^{3/2}}.$$

Les variations de $g_{3/2}$ avec z sont représentées sur la figure B.1. C'est une fonction croissante de z lorsque z varie entre 0 et 1. Pour $z \ll 1$, $g_{3/2}(z) \simeq z$, et $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \simeq 2.612$, où ζ est la fonction de Riemann.

L'équation $N = I(z)$ a une solution tant que $N \leq 2.612 \cdot V/\lambda_{\text{dB}}^3$. Si

$$\boxed{n\lambda_{\text{dB}}^3 > 2.612}, \quad (\text{B.5})$$

où $n = N/V$ est la densité volumique de particules, alors l'équation n'a pas de solution. Le problème vient de l'approximation du spectre continu (B.3). En effet, nous avons pondéré la contribution de l'état fondamental à N par $\rho(0) = 0$. Tant que la population du fondamental est du même ordre que celle des autres états, l'erreur est minime. Par contre, l'erreur devient importante si la population du fondamental devient de l'ordre du nombre de particules. En effet, d'après la relation (B.1) :

$$\bar{N}_0 = \frac{z}{1-z}.$$

Si z tend vers 1, alors \bar{N}_0 devient très grand. En particulier, $\bar{N}_0 = N$ pour $z = (1 + 1/N)^{-1}$.

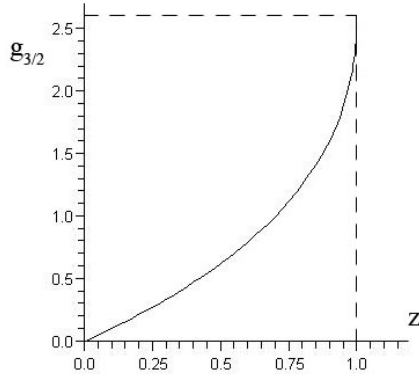


FIG. B.1 – Variation de $g_{3/2}$ en fonction de fugacité z . Nous remarquons que $g_{3/2}(1) = 2.612$.

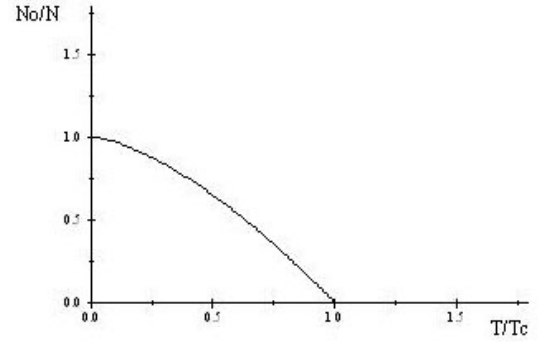


FIG. B.2 – Variation de la fraction d'atomes condensés N_0/N en fonction de T/T_c . Le phénomène de condensation opère lorsque $T < T_c$.

Nous allons séparer la contribution \bar{N}_0 de l'état fondamental, et utiliser l'approximation du spectre continu pour tous les autres états :

$$N = \frac{z}{1-z} + \int_{x_1}^{\infty} \frac{\rho(x)}{z^{-1}e^x - 1} dx ,$$

où $x_1 = \beta E_1$, E_1 étant l'énergie du premier niveau excité. On peut montrer que lorsque l'inégalité (B.5) est satisfaite, $x_1 \ll 1$. Nous pouvons donc étendre à 0 la borne inférieure de l'intégrale. Nous obtenons alors :

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda_{dB}^3} g_{3/2}(z) . \quad (\text{B.6})$$

Le phénomène de condensation Nous partons maintenant d'une température suffisamment élevée pour que $n\lambda_{dB}^3 \ll 2.612$, ie. telle que la longueur d'onde de de Broglie thermique est négligeable devant la distance moyenne entre particule $n^{-1/3}$. Alors l'équation $N = I(z)$ a une solution $z \ll 1$, et $\bar{N}_0 \ll 1$ a une contribution négligeable dans N . Si la température décroît, la longueur d'onde de de Broglie thermique croît. Pour une certaine valeur critique T_c de la température : $n\lambda_{dB}^3 = 2.612$. D'après l'expression (B.4) de λ_{dB} :

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left(\frac{n}{2.612} \right)^{2/3} .$$

Pour cette valeur de la température, $I(1) = N$. Si la température décroît encore, alors $I(1) < N$. Nous ne pouvons plus négliger la contribution de l'état fondamental : il y a condensation des particules dans l'état fondamental.

Calculons le nombre de bosons condensés dans l'état fondamental, N_0 , par rapport au nombre total de bosons. D'après la définition de la température critique et l'expression (B.6), nous obtenons

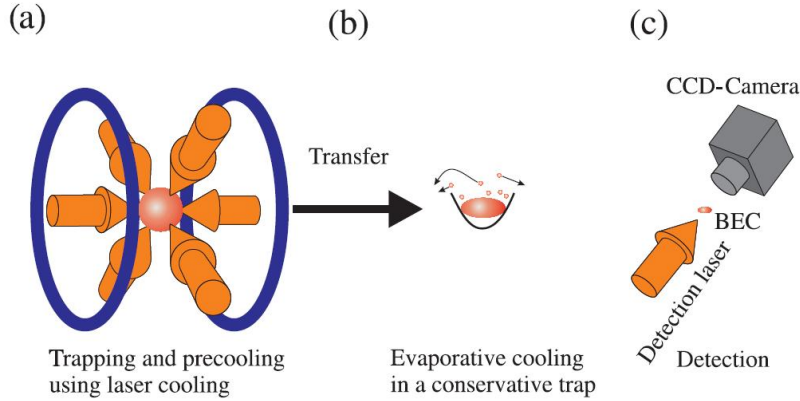


FIG. B.3 – La réalisation d'un CBE : les atomes sont refroidis par des lasers dans un piège magnéto-optique, puis dans un piège conservatif par évaporation. Les techniques d'imagerie (par absorption ou dispersion) sont destructives. Dessin tiré de [47].

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad T \leq T_c.$$

Les variations de N_0/N sont représentées sur la figure B.2. On voit clairement le phénomène de condensation pour $T < T_c$.

Nous remarquons que :

$$\frac{\delta E}{kT_c} \sim \frac{1}{N^{2/3}} \ll 1.$$

Ainsi, le phénomène de condensation dans l'état fondamental opère alors que l'énergie d'agitation des particules est beaucoup plus grande que l'écart d'énergie entre le premier niveau excité et le niveau fondamental. Par exemple, pour $N \sim 10^6$, $kT_c \sim 10^4 \cdot \delta E$.

Réalisation expérimentale d'un Condensat de Bose-Einstein (CBE) Les détails de la réalisation expérimentale d'un CBE peuvent être trouvés dans les articles [81, 142]. Elle est obtenue depuis 1995. La technique habituelle pour l'obtenir est de piéger un ensemble d'atomes dans un piège magnéto-optique, ou optique, dans un ultra-vide ($\sim 10^{-11}$ mbar). D'abord un nuage de $10^8 - 10^{11}$ atomes est refroidi à $10 - 100 \mu\text{K}$, à des densités de $10^{10} - 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, avec des techniques de refroidissement laser. Le nuage est ensuite transféré dans un autre piège, où il est encore refroidi par « évaporation »*, jusqu'à atteindre la condensation. Elle est atteinte généralement pour $10^4 - 10^7$ atomes, à une température de $100 \text{ nK} - 1 \mu\text{K}$, et une densité de l'ordre de 10^{14} cm^{-3} . Le cycle expérimental prend entre 10 et 100 secondes. Les étapes sont illustrées sur la figure B.3.

*En baissant l'intensité du piège, les atomes les plus chauds s'échappent.

TRADUCTION DE L'ARTICLE DE E. FERMI [105]

Relativité Sur les phénomènes qui arrivent au voisinage d'une ligne d'univers. Note de Enrico Fermi, présenté par le correspondant G. Armellini.

1. Faire l'étude des phénomènes qui arrivent au voisinage d'une ligne d'univers, c'est-à-dire, en langage non relativiste, d'une portion d'espace, qui éventuellement varie avec le temps, mais toujours très faiblement devant les écarts à « l'euclidité » de la variété d'espace-temps, conduira forcément à rechercher un référentiel bien choisi, dans le voisinage de la ligne étudiée, où le ds^2 de la variété prendra une forme simple. Pour trouver ce référentiel, nous devons poser quelques considérations géométriques.

Soit une variété riemannienne V_n , qui est aussi une variété métrique au sens de Weil, et une ligne L . Associons à chaque point P de L une direction y perpendiculaire à L , avec la loi que la direction $y + dy$, relative au point $P + dP$, doit se déduire de la direction y associée à P de la manière suivante : Soit η la direction tangente à L au point P ; on déplace parallèlement y et η de P à $P + dP$ et on note $y + \delta y$ et $\eta + \delta \eta$ les directions ainsi obtenues, qui, de par les propriétés fondamentales du transport parallèle sont encore perpendiculaires. Si L n'est pas géodésique $\eta + \delta \eta$ ne coïncidera pas avec la direction $\eta + d\eta$ de la tangente à L au point $P + dP$, et ces deux directions formeront un « plan » (giacitura). Considérons au point $P + dP$ l'élément de S_{n-2} perpendiculaire à ce « plan » et faisons tourner rigidement autour d'un tel S_{n-2} la portion d'espace au voisinage du point $P + dP$, jusqu'à ce que $\eta + \delta \eta$ ne se superpose plus à $\eta + d\eta$. Alors $y + \delta y$ finira dans une position qui prendra comme direction $y + dy$, relative au point $P + dP$. On comprend bien comment, ayant déterminé la direction y d'un point de L , un processus d'intégration en permet la connaissance pour chaque point de L .

Cherchons maintenant les expressions analytiques qui traduisent les opérations définies pour une variété riemannienne, qui sont identiques à celles valables pour une variété métrique

de Weil, de sorte qu'on ait la possibilité de choisir la « Eichung » (l'étalon) pour que la taille d'un segment qui se déplace rigidement dans le voisinage de L soit constante. Soit :

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C.1})$$

et soient $y_i, y^{(i)}; \eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ les systèmes co- et contravariants des directions y et η . Nous aurons

$$\frac{\delta \eta^{(i)}}{ds} = - \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = - \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds};$$

de plus $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. On trouve donc

$$\frac{\delta \eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = - \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h & l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -C^i.$$

Les C^i sont les composantes contravariantes du vecteur C , courbure géodésique, c'est-à-dire un vecteur dont l'orientation est celle de la principale géodésique normale à L et d'une taille égale à celle de sa courbure géodésique.

On a d'autre part

$$\frac{\delta y^{(i)}}{ds} = - \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}. \quad (\text{C.2})$$

Donc, comme y est perpendiculaire à L , le déplacement, de façon à ce que $y + dy$ se déduise de $y + \delta y$, sera parallèle à la tangente de L et aura une taille égale à la projection de $\delta \eta - d\eta$ sur y ; c'est-à-dire, comme y a une longueur de 1, le produit scalaire de $\delta \eta - d\eta$ par y , qui s'écrit

$$\sum_i (\delta \eta_i - d\eta_i) y^{(i)} = -ds \sum_i C_i y^{(i)}.$$

Ses composantes contravariantes s'obtiendront donc en multipliant sa grandeur par les coordonnées contravariantes de la tangente à L , c'est-à-dire $\frac{dx_i}{ds}$. Soit donc au final, $-dx_i \sum_r C_r y^{(r)}$. Il en résulte immédiatement

$$\frac{dy^{(i)}}{ds} = - \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h y^{(h)}. \quad (\text{C.3})$$

L'équation (C.3), écrite pour $i = 1, 2, \dots, n$, est un système d'équations différentielles du premier ordre dans lequel les n inconnues $y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(n)}$ sont déterminées, une fois les conditions initiales définies. Il serait aussi facile de vérifier formellement dans (C.3) que,

si les valeurs initiales des $y^{(i)}$ satisfont à la condition de perpendicularité à L , de telles conditions restent vérifiées le long de toute la ligne.

2. En un point P_0 de L définissons maintenant n directions quelconques $y_1 y_2 \dots y_n$, perpendiculaires entre elles, avec la condition que y_n soit tangente à L . Les directions $y_1 y_2 \dots y_{n-1}$ seront perpendiculaires à L et on pourra les transporter le long de L avec la règle décrite dans le paragraphe précédent qui, comme il est évident d'après sa définition même, conserve l'orthogonalité. De cette façon nous venons d'associer à chaque point de L n directions orthogonales entre elles, la dernière étant celle de la tangente à L . Supposons maintenant notre V_n plongé dans un S_N euclidien avec un nombre convenable de dimensions. Nous pouvons prendre comme coordonnées d'un point de V_n les coordonnées cartésiennes orthogonales de sa projection sur l' S_n tangent à V_n en un point P de L , ayant pour origine P et pour directions les directions $y_1 y_2 \dots y_n$ relatives au point P . Avec de telles coordonnées l'élément métrique de V_n en P prend la forme $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2$; qui de plus, comme on le voit immédiatement, sont géodésiques en P . Ce qui revient à dire que pour les coordonnées y on peut poser, autour de P et à l'ordre 0, $g_{ii} = 1$ $g_{ik} = 0$ ($i \neq k$). Il est évident qu'un tel référentiel nous n'en n'aurons qu'un en chaque point de L . Considérons un point Q_0 de V_n tel que, dans le référentiel relatif au point P_0 de L , il ait les coordonnées $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0$. Pour chaque autre point P de L nous pouvons alors déterminer un point Q tel que, dans le référentiel relatif à P , il ait les mêmes coordonnées que Q_0 dans le référentiel relatif à P_0 . Le point Q parcourera ainsi une ligne d'évolution parallèle à L . Nous voulons maintenant trouver la relation qui lie ds_Q à ds_P , dans l'hypothèse que Q soit infiniment proche de P . Pour cela observons que le déplacement de Q en $Q + dQ$ est composé des déplacements indiqués au §1, avec δ et $d - \delta$ et que le premier, étant un déplacement parallèle, à l'ordre 0, implique $\delta s_Q = ds_q$; le second est une rotation qui, comme on l'a vu au §1, donne $(d - \delta) s_Q = ds_P C \times Q - P$, si avec \times on indique le symbole du produit scalaire et avec $Q - P$ le vecteur d'origine P qui se termine en Q . En outre ds_Q et $(d - \delta) s_Q$ ont tous les deux la direction de la tangente à L . On a donc $ds_q = \delta s_q + (d - \delta) s_Q$; c'est-à-dire

$$ds_Q = ds_P [1 + C \times Q - P] . \quad (C.4)$$

Les trajectoires des points Q forment une infinité de lignes et donc, au moins avec une restriction opportune, pour chaque point M de V_n passera une telle ligne; si bien qu'on pourra caractériser M au moyen des coordonnées du point Q , $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{n-1}$ correspondant à la ligne passant par M , et l'arc s_P de la ligne L partant d'une origine arbitraire jusqu'au point P qui correspond à Q coïncidant avec M .

Si M est infiniment proche de L , ds_Q sera perpendiculaire à l'hypersurface $s_P = \text{cte}$. On aura donc

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \dots + d\bar{y}_{n-1}^2 ;$$

et, tenant compte de (C.4),

$$ds_M^2 = (1 + C \times Q - P)^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \dots + d\bar{y}_{n-1}^2 . \quad (\text{C.5})$$

Dans le voisinage de L nous avons avec cette réponse une expression très simple de ds^2 .

ARTICLES

Cold atom interferometer in a satellite : orders of magnitude of the tidal effect

Angonin, M.-C., Tournenc, Ph., & Delva, P., Applied Physics B : Lasers and Optics, 84, 579, 2006

A comparison between matter wave and light wave interferometers for the detection of gravitational waves

Delva, P., Angonin, M.-C., & Tournenc, Ph., Physics Letters A, 357, 249, 2006

M.-C. ANGONIN[✉]
P. TOURRENC
P. DELVA

Cold atom interferometer in a satellite: orders of magnitude of the tidal effect

Université P. et M. Curie ERGA/LERMA, case 142, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Received: 1 February 2006/Revised version: 20 June 2006
© Springer-Verlag 2006

ABSTRACT We consider an experiment in which an atomic wave interferometer is tied to a telescope pointing towards a faraway star in a nearly free falling satellite. Such a device is sensitive to the acceleration and the rotation relatively to the local inertial frame, as well as to the tidal gravitational effects which are considered here as a perturbation to the signal. We present briefly the method to calculate the rotation of the telescope due to the aberration and the deflection of the light in the gravitational field of a central mass. Within the framework of a general parameterized description of the problem, we discuss the contributions which must be taken into account in order to observe a specific process. We study the case of a satellite orbiting around the Earth, Jupiter and the Sun in order to measure the Lense–Thirring effect.

PACS 04.25.Nx; 04.80.Cc; 07.60.Ly; 95.30.Sf

1 Introduction

Many high-precision experiments are now sensitive to tiny effects such as relativistic gravitation perturbations, no matter what they are designed for. This is particularly true for the clocks, the accelerometers and the gyroscopes based on cold atom interferometry (for example, similar to those which are currently developed in Hannover [1, 2], Paris [3] and Orsay [4]). Their performances are already among the best which have been constructed until now and further improvements are still expected.

Earth gravity implies severe limits on the sensitivity of laser-cooled atomic devices. As a consequence, better configurations and results are to be found in space experiments. A laser-cooled atomic clock, named PHARAO, will be a part of ACES (Atomic Clock Ensemble in Space), an ESA mission on the ISS. Various other experimental possibilities involving ‘hyper-precision cold atom interferometry in space’ are presently considered. They might result in a project (called ‘HYPER’) in the future [5].

The aim of the present paper is to present a generic method to determine the order of magnitude of the various gravito-

inertial effects in a nearly free falling satellite. For this purpose we consider the most ambitious goal which has been considered for HYPER, i.e. the measurement of the Lense–Thirring effect.

The detailed calculation has already been presented in two previous papers [6, 7]. This paper gives a summary of the method and comments on the results obtained for different configurations of satellites in the solar system. The parameter which plays a role in the calculation of the Lense–Thirring effect is the angular momentum of the central mass. It is bigger for Jupiter or the Sun than the Earth. Therefore, we will discuss all the cases, without any consideration on the cost of the corresponding missions.

The principle of the method can be described in this way: we determine to the third order the local metric comoving with an idealized device. Then we define some perturbations that we add to the system in order to compute the gravitational shift in one interferometer. We determine the order of magnitude of each term in the gravitational shift and select the terms that cannot be modeled nor cancelled. We finally discuss the consequences in terms of experimental constraints of each disturbing term.

In the sequel the Greek indices run from 0 to 3 and the Latin indices from 1 to 3. We use the summation rule of repeated indices (one up and one down).

The Minkowski tensor is $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$; its inverse is $\eta^{\alpha\beta}$.

We use geometrical units where $c = G = 1$. But, throughout this paper, we give some orders of magnitude in usual units.

2 The local experiment in a satellite

In the satellite, the experimental set-up consists of a telescope pointing towards a faraway star in the $\vec{u}_{(1)}$ direction and two orthogonal atomic Sagnac units in the planes $[\vec{u}_{(3)}, \vec{u}_{(1)}]$ and $[\vec{u}_{(2)}, \vec{u}_{(1)}]$ of Fig. 1.

2.1 The atomic Sagnac unit

An atomic Sagnac unit (ASU) is made of two counter-propagating atom interferometers which discriminate between rotation and acceleration (see Fig. 2a).

✉ E-mail: m-c.angonin@obspm.fr

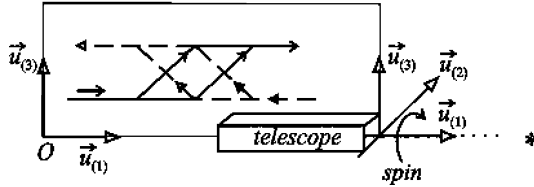


FIGURE 1 The experimental set-up

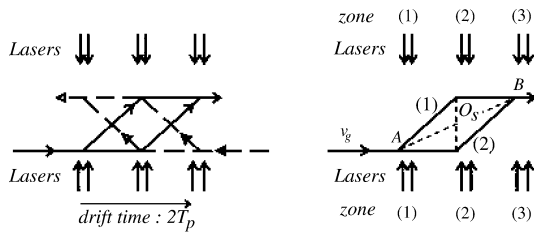


FIGURE 2 (a) An atomic Sagnac unit (ASU) (left) is made of two (b) Ramsey-Bordé interferometer (right)

Each interferometer is a so-called Ramsey-Bordé interferometer with a Mach-Zehnder geometry (Fig. 2b).

The mass of the atom depends on its internal state; therefore, it is not a constant along the different paths. However, the change of the mass is very small; it leads to negligible corrections to the main effects, which are already very small. In the case of cesium, the mass is $m = 133 \times 1.66 \times 10^{-27} = 2.2 \times 10^{-25}$ kg and the wavelength of the lasers is $\lambda = 850$ nm. The momentum transferred to the atom during the interaction is $4\pi\hbar/\lambda$. The recoil of the atom results in a Sagnac loop, which permits us to measure the angular velocity of the set-up relatively to a local inertial frame. The device is also sensitive to the accelerations.

In an ideal set-up the two interferometers are identical coplanar parallelograms with their centers O_S and O'_S at the same point, but many perturbations have to be considered. The geometry of the device is actually determined by the interaction between the initial atomic beam and the lasers. Moreover, the geometrical description is already an idealized model. Therefore, a full treatment of the atom-laser interaction in a gravitational field is obviously necessary to study the response of the ASU. Such an approach has been recently developed [8, 9]; it could give definitive results in the future.

However, the geometrical model is useful to give a physical intuition of the phenomena. In this context we assume that the two interferometers remain idealized identical parallelograms but that O_S and O'_S are no longer at the same point: this is the only perturbation that we consider here. It is sufficient to take the flavor of the gravitational perturbations which have to be taken into account and, more generally, of the difficulty inherent to such an experiment.

2.2 Parameters and geocentric coordinates

As geocentric coordinates, we define the time coordinate $x^0 = ct$ and the space coordinates x^k . We use the notation $\vec{r} = \{x^k\} = \{x, y, z\}$ and we define the spherical co-

ordinates $\{r, \theta, \varphi\}$, i.e. $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

In the sequel we consider the parameterized post-Newtonian (PPN) theories [10]. The relevant PPN parameters which appear below are γ and α_1 . The parameter γ is the usual parameter connected with the deflection of a light ray by a central mass. The parameter α_1 couples the metric to the speed, $-\vec{w}$, of the preferred frame (if any) relatively to the geocentric frame. In general relativity, $\alpha_1 = 0$ and $\gamma = 1$.

Let us define now several quantities which will be used in the sequel:

- $2M_\odot$ is the Schwarzschild radius of the central body, i.e. the Earth, Jupiter or the Sun. As we use geometrical units, M_\odot is also its 'mass'.
- \vec{J}_\odot is the angular momentum of the central body in geometrical units. The relevant quantity which appears below is $\vec{J} = ((1 + \gamma + \alpha_1/4)/2)\vec{J}_\odot$. We define $J = \|\vec{J}\| \simeq \|\vec{J}_\odot\| = J_\odot$.
- U is the Newtonian potential:

$$U = \frac{M_\odot}{r} \left(1 - J_2 \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 P_2 + \Delta \right) + U_*, \quad (1)$$

where R_\odot is the radius of the central body and U_* the potential due to its satellites and other objects in the solar system¹. In spherical coordinates the Legendre polynomial P_2 reads $P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$. The quadrupole coefficient is J_2 and Δ represents the higher harmonics. It depends on the angle φ and on the time t because of the rotation of the central body.

In the non-rotating geocentric coordinates the significant fundamental element is

$$ds^2 = (1 - 2U) dt^2 + 2g_{0k} dx^k dt - (1 + 2\gamma U) \delta_{jk} dx^j dx^k. \quad (2)$$

In the expression (2), we have dropped post-Newtonian corrections which are too small to be considered here.

2.3 Orders of magnitude

Table 1 below gives the orders of magnitude of the various parameters which have been introduced previously.

	M_\odot	J_\odot	R_\odot	J_2	Δ
Earth	4.4 mm	145 cm ²	6400 km	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-6}$
Jupiter	1.4 m	1700 m ²	71 300 km	$\sim 10^{-2}$	$\lesssim 10^{-3}$
Sun	1.47 km	0.47 km ²	696 000 km	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-7}-10^{-9}$

TABLE 1

In order to describe the physical situation we introduce four parameters: ξ , ε , η and μ .

First, we define the order of magnitude $O_1 = \sqrt{M_\odot/R_\odot}$. The quantity $(O_1)^n$ is denoted O_n .

Then we consider a nearly free falling satellite on a nearly circular orbit of radius $r \sim R_\odot/\xi$. This expression gives the

¹ An arbitrary constant can always be added to U_* . It is chosen in such a way that zero is the mean value of U_* at point O in the satellite.

definition of ξ . The undimensioned velocity of the satellite is of order $v = \xi^{1/2} O_1$.

Now we define $d = R_\odot O_1$ and ε such that $X = \varepsilon d$, where X is the size of the laboratory.

We define η . The velocity of the atoms is $v_g = \eta O_1$.

Finally, we assume that the various quantities such as the position of O or the geometry of the experimental set-up are known with a relative accuracy of order of μ .

Orbital parameters		Set-up parameters	
$O_1 = \sqrt{\frac{M_\odot}{R_\odot}}$		Relative accuracy: μ	
Radius	$r = \frac{R_\odot}{\xi}$	Size	$X = R_\odot O_1 \varepsilon \sim 60 \text{ cm}$
Velocity	$v = O_1 \xi^{1/2}$	Atom velocity	$v_g = \eta O_1 \sim 20 \text{ cm s}^{-1}/c$
Period	$T_p = \frac{2\pi}{\xi^{1/2} O_1} \frac{R_\odot}{c\xi}$	Drift time	$2T_D = X/v_g c = R_\odot \frac{\varepsilon}{\eta c} \sim 3 \text{ s}$

TABLE 2 Definition of O_1, ξ, ε and η

	O_1	ε	η	r	v	T_p	ξ
Earth	2.6×10^{-5}	3.6×10^{-3}	2.6×10^{-5}	7000 km	2.5×10^{-5}	5900 s	0.9
Jupiter	1.4×10^{-4}	6.0×10^{-5}	4.8×10^{-6}	78400 km	1.3×10^{-5}	12300 s	0.9
Sun	1.45×10^{-3}	6.0×10^{-7}	4.6×10^{-7}	1.4×10^6 km	1.0×10^{-3}	29000 s	0.5

TABLE 3

3 Expression of the metric

3.1 Expansion in the local coordinates

Following [11] and [12], we expand the metric in the neighborhood of O . These calculations are developed in other publications [6, 7]. For the sake of simplicity we have followed the notation of these articles. Here, we just give the useful results.

We consider a satellite and a point O which is the origin of the local coordinates in the satellite. We assume that the position of O is given by its three space coordinates, $\vec{r} = \{x, y, z\} = \{x^k\}$, considered as three known functions of the coordinate time, t . Then we define the velocity of point O as $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

The proper time at point O is s . The motion of O can be described as well by the four functions $x^\alpha = x^\alpha(s)$. The 4-velocity is defined as $u^\alpha = dx^\alpha/ds$.

We choose a tetrad, e^α_σ , whose vector $e^\alpha_0 = u^\alpha$ is the 4-velocity, u^α , of point O . Thus, the vectors e^α_k define the basis of the space vectors for the observer O . The coordinates which are associated with the tetrad are the space coordinates X^k and the time $X^0 = T = s$.

We limit the expansion of the metric to order $\varepsilon^2 \xi^4 O_6$. One finds that

$$G_{00} = 1 + 2\vec{a} \cdot \vec{X} - \hat{U}_{, \hat{k} \hat{j}} X^{\hat{k}} X^{\hat{j}} - \frac{1}{3} \hat{U}_{, \hat{k} \hat{j} \hat{\ell}} X^{\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{\ell}} + \varepsilon^2 \xi^4 O_6, \quad (3)$$

$$G_{0\hat{m}} = -\left\{ \vec{\Omega}_0 \wedge \vec{X} \right\}^{\hat{m}} + \varepsilon^2 \xi^{7/2} O_5 \text{ and } G_{\hat{n} \hat{m}} = \eta_{\hat{n} \hat{m}} + \varepsilon^2 \xi^3 O_4, \quad (4)$$

where $\vec{\Omega}_0$ is given below (see (5)), while the expressions such as $\hat{U}_{, \hat{k} \hat{j}}$ are nothing but $\left(U_{, mn} e^m_{\hat{k}} e^n_{\hat{j}} \right)_O$. The position of the observer changes with time; therefore, this quantity is a function of T .

We did not consider the time dependence of the potential U . One can prove that this is correct when

$$\frac{\delta U}{U} \times \frac{r}{c T_c} \lesssim \xi O_2,$$

where $\delta U/U$ is the relative change of the potential during the characteristic time T_c , at the distance r from the origin. This is generally the case.

Calculating $\vec{\Omega}_0$, one finds that

$$\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_{\text{LT}} + \vec{\Omega}_{\text{dS}} + \vec{\Omega}_{\text{Th}}, \quad (5)$$

$$\left(\vec{\Omega}_{\text{LT}} \right)^{\hat{k}} \simeq \left(\frac{\vec{J}}{r^3} - \frac{3}{r^3} (\vec{J} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \frac{\alpha_1}{4} \vec{\nabla} U \wedge \vec{w} \right)^{\hat{k}}, \quad (6)$$

$$\left(\vec{\Omega}_{\text{dS}} \right)^{\hat{k}} \simeq \left((1 + \gamma) \vec{\nabla} U \wedge \vec{v} \right)^{\hat{k}} \text{ and } \left(\vec{\Omega}_{\text{Th}} \right)^{\hat{k}} \simeq \left(\frac{1}{2} \vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^{\hat{k}}. \quad (7)$$

Here $\vec{\Omega}_{\text{LT}}$ is the Lense–Thirring angular velocity and $\vec{\Omega}_{\text{dS}}$ and $\vec{\Omega}_{\text{Th}}$ are the de Sitter and the Thomas terms²:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{LT}} &\sim \frac{J_\odot}{M_\odot^2} \xi^2 O_4 \frac{c\xi}{R_\odot} \\ \Omega_{\text{dS}} \sim \Omega_{\text{Th}} &\sim \xi^{3/2} O_3 \frac{c\xi}{R_\odot} \end{aligned}$$

TABLE 4

One finds that

	J_\odot/M_\odot^2	Ω_{LT}
Earth	750	$\sim 10^{-14} \text{ rad s}^{-1}$
Jupiter	855	$\sim 10^{-12} \text{ rad s}^{-1}$
Sun	0.22	$\sim 10^{-13} \text{ rad s}^{-1}$

TABLE 5

The Lense–Thirring effect value favors the cases of a satellite around the Sun or Jupiter rather than around the Earth. But it does not mean that the measurement is easier in the cases of Jupiter and the Sun, since it depends on the amplitude of the perturbations of the phase shift in the interferometers.

3.2 Gravitational shift in the local coordinates tied to the telescope

Now we introduce the tetrad $u^\alpha_{(\sigma)}$, which is obtained from the tetrad e^α_σ through a pure space rotation (i.e. $u^\alpha_{(0)} = e^\alpha_0 = u^\alpha$) and whose vector $u^\alpha_{(1)}$ points towards the far-away star. This definition represents what we call the local

² The Thomas term reads $\vec{\Omega}_{\text{Th}} = \frac{1}{2} \vec{v} \wedge \vec{A}$, where \vec{A} is the ‘acceleration’. From the relativistic point of view, it would be better to define the Thomas term with the local physical acceleration, $\vec{A} \simeq (d\vec{v}/dt) - \vec{\nabla} U$, rather than the acceleration, $d\vec{v}/dt$, relatively to the geocentric frame.

coordinates tied to the telescope for, in the satellite, the experimental set-up is tied to a telescope which points towards a ‘fixed’ star (see Fig. 1). We assume that the star is far enough away for the parallax to be negligible. However, the light rays suffer a gravitational deflection from the central body and an aberration which depends on the position and the velocity of the satellite. These effects result in an angular apparent velocity which must be compared to the Lense–Thirring effect.

The metric associated with the tetrad $u_{(a)}^\alpha$ is calculated following the method described in [12] and in [11]. Let us assume that the fundamental element is known:

$$ds^2 = (1 + K_{(0)(0)}) dT^2 + 2K_{(0)(k)} dT dX^{(k)} + (\eta_{(k)(j)} + K_{(k)(j)}) dX^{(k)} dX^{(j)}.$$

With this notation and following a WKB approximation to calculate the phase difference (we use the method developed in [13]), we can calculate the gravitational shift Ψ which gives the physical quantities that one can measure:

$$\Psi = K_{(0)(0)} + 2K_{(0)(k)} v_g^{(k)} + K_{(k)(j)} v_g^{(k)} v_g^{(j)}, \quad (8)$$

where $v_g^{(k)}$ is the velocity of the atoms (i.e. the unperturbed group velocity).

As was shown in [6] and in [7], a straightforward calculation gives

$$\Psi = 2\vec{a} \cdot \vec{X} - \hat{U}_{(k)(j)} X^{(k)} X^{(j)} - \frac{1}{3} \hat{U}_{(k)(j)(\ell)} X^{(k)} X^{(j)} X^{(\ell)} - 2 \sum_{(k)} \left\{ (\vec{\Omega}_0 + \vec{\Omega}_*) \wedge \vec{X} \right\}^{(k)} v_g^{(k)} + \varepsilon^2 \xi^4 O_6, \quad (9)$$

with $\vec{\Omega}_*$ the angular velocity of the telescope relatively to $\{e_a^\alpha\}$.

The Lense–Thirring contribution to Ψ is $\Psi_{LT} \sim J_\odot / M_\odot^2 \xi^3 \varepsilon \eta O_6$. Therefore, within the present framework, the expected accuracy is of order

	Earth	Jupiter	Sun
$\frac{\varepsilon^2 \xi^4 O_6}{(J_\odot / M_\odot^2) \xi^3 \varepsilon \eta O_6} \sim \frac{\varepsilon \xi}{(J_\odot / M_\odot^2) \eta}$	17%	1.3%	300%

TABLE 6

At this point, a first major problem appears: despite the high value of the Lense–Thirring effect for the Sun, the expansion of the metric to the third order is not sufficient to consider a precise measurement of the effect. In other words, the measurement of the Lense–Thirring effect with the Sun as a central rotating body needs to consider fourth-order perturbations on the top of those that we consider in this paper.

4 Discussion of the different terms of the gravitational shift

We consider that Ψ is the addition of two terms: the term Ψ_k can be modelled with the required accuracy while Ψ_u is unknown and has to be discussed. The term Ψ_k fulfills the condition $\mu \Psi_k \lesssim \varepsilon^2 \xi^4 O_6$.

We can assume that the experimental set-up is comoving with the triad $\vec{u}_{(n)}$, whose vector $\vec{u}_{(1)}$ points towards the fixed star.

In order to calculate the quadrupolar term in U , we define the unitary vector, \vec{k} , along the axisymmetry axis. One obtains

$$U = \frac{M_\odot}{r} - \frac{1}{2} J_2 \frac{M_\odot}{r} \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 \left(3 (\vec{k} \cdot \vec{n})^2 - 1 \right). \quad (10)$$

Therefore Ψ_u reads, with the notation of Fig. 3,

$$\Psi_u = -2 \left(\left(\frac{\vec{J}}{r^3} - \frac{3 (\vec{J} \cdot \vec{n})}{r^3} \vec{n} + \frac{\alpha_1 M_\odot}{4r^2} \vec{n} \wedge \vec{w} \right) \wedge \vec{X} \right) \cdot \vec{v}_g \quad (11a)$$

$$- 2\varpi (\vec{u}_{(1)} \wedge \vec{X}) \cdot \vec{v}_g \quad (11b)$$

$$- 2 \frac{M_\odot}{r^2} ((\vec{u}_{(1)} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{X}) \cdot \vec{v}_g + 2 ((\vec{u}_{(1)} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{X}) \cdot \vec{v}_g \quad (11c)$$

$$+ \frac{M_\odot}{r^3} (\vec{X}^2 - 3 (\vec{n} \cdot \vec{X})^2) + \frac{3}{2} J_2 \frac{M_\odot}{r^3} \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 Q \quad (11d)$$

$$+ 2\vec{a} \cdot \vec{X}, \quad (11e)$$

with

$$Q = \left(1 - 5 (\vec{k} \cdot \vec{n})^2 \right) \vec{X}^2 - 20 (\vec{k} \cdot \vec{n}) (\vec{n} \cdot \vec{X}) (\vec{k} \cdot \vec{X}) + 5 \left(7 (\vec{k} \cdot \vec{n})^2 - 3 \right) (\vec{n} \cdot \vec{X})^2 + 2 (\vec{k} \cdot \vec{X})^2$$

and

$$\vec{J} = J \vec{k}.$$

In (11a)–(11e), the terms of lines (11a), (11b) and (11c) are due to various rotations: respectively the Lense–Thirring rotation, the spin around the view line of the star and the aberration. The term of line (11d) gives the gravitational tidal effects (which are mainly due to the central rotating object)

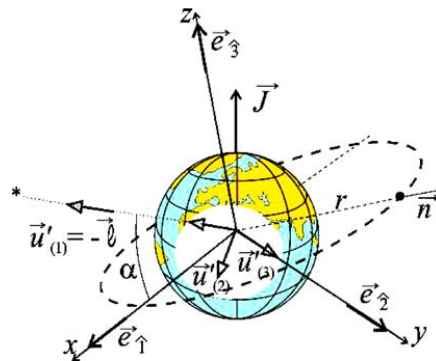


FIGURE 3 The satellite and the fixed star

and the last term (line (11e)) corresponds to some residual acceleration due to the fact that point O is not exactly in free fall.

The order of magnitude of each term can be determined. As has already been shown in [7], one of the most troublesome terms comes from the tidal effect.

Ψ_u reads

$$\Psi_u = 2\vec{a} \cdot \vec{X} - \hat{U}_{(k)(j)} X^{(k)} X^{(j)} - 2 \left\{ \vec{\Omega} \wedge \vec{X} \right\} \cdot \vec{v}_g + \varepsilon^2 \xi^4 O_6 / \mu, \quad (12)$$

where $\varpi = \vec{\Omega}_{LT} + \vec{\omega}_{(1)} + \vec{u}_{(1)} \wedge (d\vec{v}/dt)$ and where the contribution $\hat{U}_{(k)(j)} X^{(k)} X^{(j)}$ needs to be defined with an accuracy better than $\varepsilon^2 \xi^4 O_6$, which results in the necessary condition $\Delta U/U \lesssim \xi O_2$ and gives the constraints on the amplitude of the tidal effect.

	Earth	Jupiter	Sun
$\frac{\Delta U}{U} \lesssim \xi O_2$	6.2×10^{-10}	1.8×10^{-8}	1.0×10^{-6}

TABLE 7

Such an accuracy is not achieved for any object of the solar system. One can hope that the lack of precision in the J_{kn} coefficients³ is not important for $n \neq 0$ because the diurnal rotation modulates the frequency of the corresponding contribution in $\hat{U}_{(k)(j)} X^{(k)} X^{(j)}$. However, it is necessary to increase our knowledge of the axisymmetrical potential of the central body in order that $\xi^k \Delta J_{k0} \lesssim \xi O_2$, where ΔJ_{k0} is the uncertainty in $J_{k0} = J_k$. Such a relation holds true for $k = 2$. It could be presently achieved with low values of ξ (on high orbits) but the Lense–Thirring effect is proportional to ξ^3 (see Table 4 above) and it seems impossible to measure the Lense–Thirring effect for $\xi \ll 1$ in the not too far future.

Time analysis might bring an answer to this crucial question.

5 Spinning satellite

We consider that the motion of the satellite takes place in the (x, y) plane, while the vector $\vec{\ell}$ (as defined in Fig. 3, along the line of sight of the faraway star) lies in the (x, z) plane (Fig. 3). We assume that the eccentricity, e , does not exceed $\xi^{1/2} O_1$.

We consider one among the four interferometers of the device above. We obtain the phase difference that we want to measure:

$$\delta\varphi = \frac{\omega}{2} \int_{t-2T_D/(2)}^t \psi(t') dt' - \frac{\omega}{2} \int_{t-2T_D/(1)}^t \psi(t') dt'. \quad (13)$$

The integrals are performed along paths (2) and (1) of Fig. 2b. The ‘angular frequency’ ω is defined as mc^2/\hbar .

The method and result of this calculation is detailed in [6] and in [7]. It allows us to determine the temporal dependences

of each term in the phase difference in an interferometer. They can be measured and distinguished from each other with time analysis. Moreover, it is possible to produce a linear combination of the signals coming from two superimposed interferometers. If we define θ as the position angle of the satellite in its orbit and σ as the spin angle of the satellite, the obtained signal is composed of the different terms presented in Table 8.

Effect	Signal frequencies
Lense–Thirring	$\sigma; 2\theta - \sigma; 2\theta + \sigma$
Geometry of the set-up	$\sigma; 2\theta; 2\sigma; 2\theta - \sigma; 2\theta + \sigma; 2\theta - 2\sigma; 2\theta + 2\sigma$
Change of the local field during the flight time of the atoms	$2\theta - \sigma; 2\theta + \sigma$
Preferred frame	$\theta - \sigma; \theta + \sigma$

TABLE 8

The Lense–Thirring effect due to the angular momentum of the central body appears in the frequencies corresponding to σ and $2\theta \pm \sigma$, while the possible existence of a preferred frame appears in $\theta \pm \sigma$, which depends on the components of $\alpha_1 \vec{w}$.

The interest in the spin is obvious. If $\sigma = cte$ (no spin) the signal is the sum of two periodic signals with frequencies ν_O and $2\nu_O$, where ν_O is the orbital frequency of the satellite; therefore, one ASU gives two items of information (two functions of the time). When the satellite spins, we obtain nine functions of the time t . The information is much more important in this case.

More precisely, the signal due to the Lense–Thirring effect is associated with the signal due to the geometry of the set-up. Without any time analysis of the signal, the constraints to measure the Lense–Thirring effect correspond to two perfectly symmetric interferometers superimposed with a precision of less than 2 nm [6]. Today, it seems impossible to reach such an accuracy; this is the reason why it should be calculated from the Fourier analysis of the signal.

What can be deduced from the time analysis depends on the accuracy of the various parameters. From the frequencies $2\theta \pm 2\sigma$ we deduce α . Then from $\theta \pm \sigma$ we obtain constraints on the preferred frame hypothesis.

From the frequencies $2\theta \pm \sigma$ and σ one can calculate the geometric parameters of the interferometers and obtain the value of the Lense–Thirring effect. Moreover, one could also check whether the PPN parameters satisfy $\gamma + \alpha_1/4 = 1$.

6 Conclusion

We have shown that, in a satellite moving around an object of the solar system, the Lense–Thirring effect is associated with many perturbations which cannot be cancelled. We have exhibited the various terms that one needs to calculate in order to obtain the full signal and we have emphasized the necessity to increase our knowledge of the Newtonian gravitational potential. This is still more crucial for Jupiter despite the fact that the Lense–Thirring effect is much bigger. The case of the Sun is even worse since terms of the fourth order have to be taken into account.

³ Notation of the paper by Ch. Marchal in Bulletin du Museum d’Histoire Naturelle, 4ème Série, Section C **18**, 517 (1996).

Using four parameters, ξ , ε , η and μ defined in Table 2, we have also sketched a method to take into account the residual gravitational field in a nearly free falling satellite, namely the tidal and higher-order effects.

The time analysis of the combined signal coming from two superimposed interferometers seems to remove efficiently the degeneracies in the signal and should allow us to measure the Lense–Thirring effect and test some of the PPN parameters.

But, overall, the best test would be that the signal (as a function of the time) fits the theoretical prediction.

REFERENCES

- 1 C. Jentsch, T. Muellerand, S. Chelkowski, E.M. Rasel, W. Ertmer, Verhandl. DPG (VI) **38**, 167 (2003)
- 2 J. Keupp, A. Douillet, T.E. Mehlstäubler, N. Rehbein, E.M. Rasel, W. Ertmer, Eur. Phys. J. D **36**, 289 (2005)
- 3 B. Canuel, F. Leduc, D. Holleville, A. Gauguier, J. Fils, A. Virdis, A. Clairon, N. Dimarcq, C.J. Bordé, A. Landragin, P. Bouyer, Phys. Rev. Lett. **97**, 010402 (2006)
- 4 R.A. Nyman, G. Varoquaux, F. Lienhart, D. Chambon, S. Boussem, J.-F. Clément, T. Muller, G. Santarelli, F. Pereira Dos Santos, A. Clairon, A. Bresson, A. Landragin, P. Bouyer, ArXiv:cond-mat/0605057 (2006)
- 5 R. Bingham et al., HYPER, Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space Assessment Study Report, Vol. 10, ESA-SCI (2000)
- 6 M.-C. Angonin, X. Ovido, P. Tourrenc, Gen. Relat. Grav. **36**, 411 (2004)
- 7 P. Tourrenc, M.-C. Angonin, X. Ovido, Gen. Relat. Grav. **36**, 2237 (2004)
- 8 C. Antoine, C.J. Bordé, J. Opt. B **5**, S199 (2003)
- 9 C.J. Bordé, Gen. Relat. Grav. **36**, 475 (2004)
- 10 C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, 1981)
- 11 W.-T. Ni, M. Zimmermann, Phys. Rev. D **17**, 1473 (1978)
- 12 W.-Q. Li, W.-T. Ni, J. Math. Phys. **20**, 1473 (1979)
- 13 B. Linet, P. Tourrenc, Can. J. Phys. **54**, 1129 (1976)



A comparison between matter wave and light wave interferometers for the detection of gravitational waves

P. Delva*, M.-C. Angonin, P. Tourrenc*

Université P. et M. Curie, ERGA, case 142, 4, place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

Received 24 March 2006; accepted 10 April 2006

Available online 11 May 2006

Communicated by P.R. Holland

Abstract

We calculate and compare the response of light wave interferometers and matter wave interferometers to gravitational waves. We find that metric matter wave interferometers will not challenge kilometric light wave interferometers such as Virgo or LIGO, but could be a good candidate for the detection of very low frequency gravitational waves.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 04.30.-w; 04.80.Nn; 95.55.Ym; 03.75.-b; 39.20.+q

Keywords: Gravitational waves detection; Matter waves; Interferometry

1. Introduction

The extreme sensitivities required to detect gravitational waves still represent a challenge. LIGO interferometers¹ have reached their nominal sensitivity and have begun scientific runs giving upper limits of gravitational waves in various cases: gravitational bursts, stochastic background and periodic waves [1–3]. Virgo² is now in the commissioning phase; its sensitivity should be better than LIGOs at low frequencies (around 10 Hz).

However despite important technological improvements in many domains, the present detectors will not be able to observe the very low frequency sources of astrophysical interest. The LISA project [4], a space-based laser interferometer with 5 millions kilometers arms, is presently the best known solution to improve the detectors capabilities at very low frequencies. The challenge is impressive, we thus believe that new technologies will be necessary for further developments in the future.

In 2004, Chiao and Spiliotopoulos [5] proposed to use matter-wave interferometers as gravitational wave detectors (the so-called MIGO, Matter-wave Interferometric Gravitational-wave Observatory). They claimed that MIGO could reach the same sensitivity as LISA or LIGO in a much more compact configuration. Their results are discussed in papers from Roura et al. [6] and Foffa et al. [7]. The various authors find divergent results. These differences originate from different physical interpretations of the various coordinate systems which were used and from the different boundary conditions which were assumed.

In the present Letter we consider various matter-wave interferometers. For each of them, we estimate the order of magnitude of the phase shift due to a periodic gravitational wave. We compare the sensitivity of matter wave interferometers (MWI) and light wave interferometers (LWI). Several boundary conditions are considered: fixed or free mirrors. In each case we clearly point forward the corresponding comoving coordinates. We emphasize the role of the three mostly relevant parameters, i.e., the atomic flux, the atomic speed and the number of atomic bounces in the arms of the interferometers when similar to Fabry–Perot cavities in optics.

In the present Letter, we do not consider the technical feasibility. Our goal is just to compare MWIs and LWIs in order

* Corresponding authors.

E-mail addresses: pacome.delva@obspm.fr (P. Delva), m-c.angonin@obspm.fr (M.-C. Angonin), pht@ccr.jussieu.fr, philippe.tourrenc@upmc.fr (P. Tourrenc).

¹ <http://www.ligo.caltech.edu/>.

² <http://www.ego-gw.it/>.

to become familiar with MWIs and to discover the conditions necessary for matter wave interferometers to be useful. Once these conditions are put forward it might be possible to have an opinion on the future feasibility of such detectors. For this next step, an expertise in high-tech experiments, cold atoms and matter wave interferometry is crucial, as well as a high dose of optimism.

Now, before we start, let us recall that a gravitational wave is a perturbation, $h_{\mu\nu}$, in the local metric

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1)$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is the usual Minkowski metric and the Greek indices run from 0 to 3. In the sequel h refers to the order of magnitude of the biggest $|h_{\mu\nu}|$ (i.e., $|h_{\mu\nu}| \lesssim h \ll 1$).

2. The quantum phase

In this section we consider the matter wave associated to a particle of mass m (for a light wave $m = 0$). We investigate the perturbation of the quantum phase due to the perturbation $h_{\mu\nu}$ of the metric.

First we consider the propagation of the wave between two mirrors or two beam splitters A and B . The quantum phase ϕ is developed up to the first order relatively to h : $\phi = \phi_o + \delta\phi$ where ϕ_o is the unperturbed quantum phase while $\delta\phi$ is the perturbation of order h . The phase ϕ is assumed to be a solution of the eikonal equation: $g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} = (mc/\hbar)^2$, where \hbar is Planck's constant and c the light velocity in vacuum. Therefore the unperturbed solution is $\phi_o = k_\mu x^\mu + cst$ with $k_\mu = \partial_\mu \phi_o = \eta_{\mu\nu} p^\nu / \hbar$, where p^ν is the unperturbed particle momentum. For a matter wave $p^\nu = \gamma mc(1, \vec{v}/c)$, where \vec{v} is the group velocity of the wave and $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$. Let us notice that the atom energy is $E = \hbar c k^0$.

The worldlines of the mirrors or the beam splitters A and B are perturbed by the GW. Let call $x_A^\mu = x_A^\mu(t)$ and $x_B^\mu = x_B^\mu(t)$ their trajectories. Knowing k^μ and t_B (the arrival time of the atom), we can deduce t_A (its departure time): $x_B^\mu - x_A^\mu = \alpha k^\mu$, where α is a constant. This is illustrated on Fig. 1. We define $[\phi]_A^B \equiv \phi[x_B^\mu(t_B)] - \phi[x_A^\mu(t_A)]$. In order to calculate $[\phi]_A^B$ we

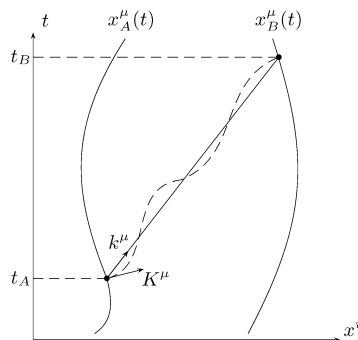


Fig. 1. The matter wave propagates between the two optical elements A and B (dashed line). The unperturbed trajectory is the straight line.

use the method described in [8,9]. The solution reads

$$[\phi]_A^B = [\phi_o]_A^B + [\delta\phi]_A^B, \quad (2)$$

where

$$[\phi_o]_A^B = k_\mu x_B^\mu - k_\mu x_A^\mu, \quad (3)$$

$$[\delta\phi]_A^B = \frac{\hbar c^2}{2} \int_{t_A}^{t_B} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \frac{dt}{E}. \quad (4)$$

The integration in (4) is performed along the unperturbed trajectory (the straight line of Fig. 1).

The phase is a scalar, therefore $[\phi]_A^B$ is independent of the coordinate system, although the decomposition (2) is not. A first order coordinate transformation results in a first order change of the functions $x_{A,B}^\mu(t)$ and a first order change of $h_{\mu\nu}$ in (1). Both effects have to be into account. Then, contrary to the claim of Chiao and Spiliotopoulos in [5], one can show explicitly that the result is invariant [6]. In the sequel, for the sake of simplicity, we will choose a coordinate system where the optical elements are at rest, i.e., \vec{x}_A and \vec{x}_B are independent of the time coordinate x^0 .

3. The free interferometer

3.1. The Einstein coordinates (EC)

In the weak-field approximation, in empty space, the Einstein equations are

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\tau} (h_{\sigma\tau,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\sigma\tau} - h_{\sigma\nu,\mu\tau} - h_{\mu\tau,\sigma\nu}) = 0. \quad (5)$$

In harmonic coordinates the condition $\partial_\nu h_\mu^\nu = \frac{1}{2} \eta_\mu^\nu \partial_\nu h_\alpha^\alpha$ holds true. The Einstein equations (5) read

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Gravitational waves (GW) are solutions of such a propagation equation. Far away from the sources, plane waves are solutions of (6). Some more constraints on $h_{\mu\nu}$ (i.e., $\partial_t h_j^i = 0$ and $h_i^i = 0$, where Latin indices run from 1 to 3) define an unique coordinate system: we will call it the Einstein coordinates (EC). To simplify the problem, we assume that the GW is propagating along the $z \equiv x^3$ axis. The only nonzero components of $h_{\mu\nu}$ are $h_{rs} = h_{rs}(z - ct)$, with $r, s = 1$ or 2 , then

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{rs} dx^r dx^s. \quad (7)$$

In the slow motion limit, the space coordinates x^i of a point mass particle satisfy the equations

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\dot{h}_j^i \frac{dx^j}{dt} + O(h^2, v^2 h) \quad \text{with} \quad |v^i| = \left| \frac{dx^i}{dt} \right| \ll c, \quad (8)$$

where $(\dot{}) = \frac{d}{dt}()$.

It is easy to see that a point mass initially at rest remains at rest in the EC during the passage of a GW.

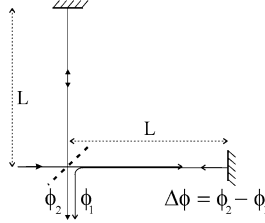


Fig. 2. Michelson interferometer.

3.2. The Michelson–Morley interferometer

We study a Michelson–Morley configuration with the arms along the x^1 and x^2 axis. The optical elements are supposed to be free of any constraints (free falling in LISA or fixed on super attenuators in Virgo). Their spatial EC remain constant with time.

We assume that h_{rs} is a sinusoidal function where Ω is the angular frequency of the gravitational wave. Moreover we assume that the size of the experimental device along the z axis is much smaller than the gravitational wavelength $\Lambda = 2\pi c/\Omega$. These conditions results in $h_{11}(z - ct) = -h_{22}(z - ct) = h_+ \sin(\Omega t)$ and $h_{12}(z - ct) = h_{21}(z - ct) = h_\times \sin(\Omega t + \varphi_\times)$ where h_+ , h_\times and φ_\times are three constants. Then, using the notations of Fig. 2 and Eqs. (2) and (7), the phase difference between the two arms of the interferometer is

$$\Delta\phi = -4\pi h_+ \frac{V}{\Omega\lambda} \sin \frac{\Omega L}{V} \sin \Omega t, \quad (9)$$

where $V = c$ for a light wave and $V = v_0$, the initial group velocity, for a matter wave. λ is the wavelength; for a matter wave, it is the De Broglie wavelength: $\lambda = 2\pi\hbar/m\gamma v_0$.

When $\Omega L/V \ll 2\pi$ the amplitude of $\Delta\phi$ in (9) is

$$\widetilde{\Delta\phi} = 4\pi |h_+| \frac{L}{\lambda}. \quad (10)$$

This formula is well known for LWIs such as Virgo or LISA [10, p. 54]. It holds true for a MWI. However, for a LWI, the condition $\Omega L/V \ll 2\pi$ corresponds to $L \ll \Lambda$ while it implies $L \ll \frac{v_0}{c} \Lambda$ for a MWI.

3.3. Light wave interferometers versus matter wave interferometers

In Virgo or LISA, the laser source is a Nd:YAG infrared laser with $\lambda \simeq 10^{-6}$ m. Decreasing the laser wavelength in order to increase the amplitude $\widetilde{\Delta\phi}$ of the phase difference in (10) raises technical difficulties (laser stability, mirrors quality). On the other hand it seems easier to achieve in a MWI: for instance in [11], the wavelength is 16 pm. As a consequence, the phase difference in a MWI can be much larger than in a LWI, and the sensitivity appears to be much better. Unfortunately, this conclusion does not hold anymore when one considers the fundamental limit.

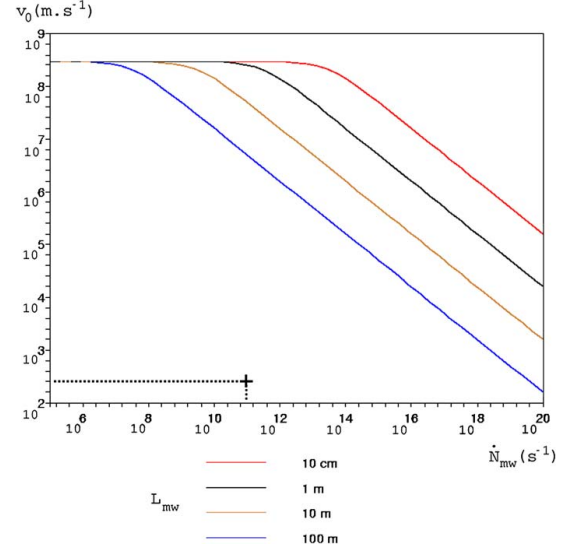


Fig. 3. Required characteristics of a MWI necessary to reach the sensitivity of Virgo.

The signal is ultimately limited by the shot noise. The minimum phase difference that can be detected is

$$\widetilde{\Delta\phi} \sim \frac{1}{2\sqrt{N}t}, \quad (11)$$

where \dot{N} is the particle flux and t the integration time.

The atom flux in the experiment described in [11] is only 70 s^{-1} which is very low but in Ref. [12] the atom flux is 10^{11} s^{-1} for a velocity of 290 m s^{-1} (i.e., $\lambda \simeq 10 \text{ pm}$). Such a flux remains however very small compared to the photon flux in Virgo which is of order 10^{23} s^{-1} [13]. Therefore one can show that metric MWIs have to be considerably improved to compete with kilometric LWIs.

However, the LISA effective flux can be estimated of order 10^8 s^{-1} [4, p. 60]. It is much lower than the Virgo effective flux, and even lower than the better MWI fluxes. Therefore, it seems easier to achieve with a MWI the sensitivity of LISA than the sensitivity of Virgo.

Assuming that the detection is only limited by the shot noise and that the integration times are the same, one obtains the conditions for similar sensitivities of MWIs and LWIs from formulas (10) and (11)

$$\gamma v_0 L_{\text{mw}} \sim \frac{2\pi\hbar L_{\text{lw}}}{m\lambda_{\text{lw}}} \sqrt{\frac{\dot{N}_{\text{lw}}}{\dot{N}_{\text{mw}}}}, \quad (12)$$

where the subscripts mw and lw denote respectively the characteristics of the MWI and the LWI.

On Figs. 3 and 4 we represent the required characteristics³ of a MWI necessary to reach the sensitivity of Virgo (Fig. 3)

³ These curves are drawn from formula (12) for the caesium mass. v_0 , L_{mw} and \dot{N}_{mw} are respectively the initial atom wave group velocity, the MWI arm

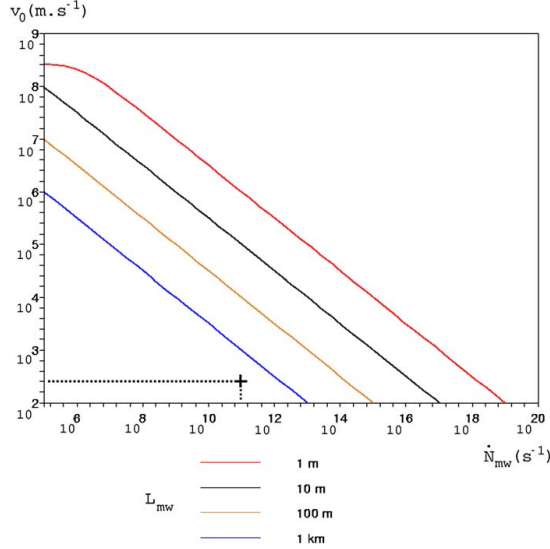


Fig. 4. Required characteristics of a MWI necessary to reach the sensitivity of LISA.

and that of LISA (Fig. 4). The characteristic point of the MWI described in [12] has been represented on both figures.

It appears clearly that the atom velocity has to be very high in order to reach Virgo sensitivity. However it would be a difficult challenge to keep the coherence and to separate the matter ray at such velocities. An idea could be to accelerate atoms inside the interferometer arms after separating the matter ray, and decelerate it before the reflections. For example, in GANIL,⁴ one can obtain an ion ray at half the light velocity with fluxes up to $2.6 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$. In order to decrease the velocity a possibility could be to increase the matter flux or the mass of the atoms [14] or to increase the arm length. However a good compromise cannot be achieved nowadays.

On the other hand, it seems easier to reach LISA sensitivity since the required atom velocity is much lower. The characteristic point of the MWI described in [12] corresponds to a kilometric interferometer. A one meter MWI with ~ 1000 round-trips in each arm would play the same role. It would be similar to the Fabry–Perot cavities in Virgo like interferometers.

4. The rigid interferometer

4.1. The Fermi coordinates (FC)

In usual matter wave interferometers the mirrors and the beam splitters are “rigidly” bounded [11,12,15]. The concept of rigid body is not a relativistic one, however if the experimental set-up is much smaller than the gravitational wavelength

length and the atom flux. The characteristic point corresponds to the MWI described in [12].

⁴ Grand Accélérateur National d’Ions Lourds.

($L \ll \lambda$), one can introduce Fermi like coordinates (FC) comoving with the matter of the set-up supposed to be “rigid” [10, pp. 39–47]. We will assume here that a rigid body has fixed coordinates in the FC.

Lasers are used as mirrors and beam splitters in the experiments [12,15]: it does not add a major perturbation to the phase difference. Indeed, in FC, the description of the physical phenomena (including the Maxwell equations) is very similar to the special relativistic one [10, p. 52].

We choose the center of mass of the interferometer as the origin of the Fermi reference frame. The whole device is supposed to be free of constraints, so that the worldline of its center of mass is a geodesic. The metric can be derived from the general formula of Manasse and Misner [16]. It is convenient here to derive the coordinate transformation from EC, x^α , to FC, X^α , in order to link the movement of the optical elements in the two coordinate systems. This coordinate transformation has been derived with a general method that will be discussed in detail in a future paper. In order to find the metric up to the second order relatively to the X^i , one needs the coordinate transformation up to the third order:

$$\begin{cases} x^r = X^r - \frac{1}{2}h_s^r X^s - \frac{1}{3}\ddot{h}_s^r X^s Z^2 + O(\xi^4, h^2), \\ x^a = X^a - \frac{1}{4}\dot{h}_{rs} X^r X^s - \frac{1}{6}\ddot{h}_{rs} X^r X^s Z + O(\xi^4, h^2), \end{cases} \quad (13)$$

where $r, s = 1$ or 2 , $a = 0$ or 3 , $Z \equiv X^3$, $\xi \sim \sup |X^i|$ and $c = 1$ (geometrical units). Then, the metric is

$$\begin{aligned} ds^2 = & \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \frac{1}{2}\ddot{h}_{rs} X^r X^s \left(dT^2 + \frac{1}{3} dZ^2 \right) \\ & - \frac{2}{3}\dot{h}_{rs} X^r X^s dT dZ \\ & + \frac{1}{3}\ddot{h}_{rs} Z dX^r \left(2X^s dT - X^s dZ + \frac{1}{2} Z dX^s \right) \\ & + O(\xi^3, h^2) \end{aligned} \quad (14)$$

where $T \equiv X^0$. This metric is in agreement with reference [17] where Fortini and Gualdi obtain the metric up to any order, although they do not derive the coordinate transformation that we consider here.

In the neighborhood of the plane $Z = 0$, one obtains

$$\begin{cases} x^r = X^r - \frac{1}{2}h_s^r X^s + O(\xi^4, h^2), \\ x^a = X^a - \frac{1}{4}\dot{h}_{rs} X^r X^s + O(\xi^4, h^2) \end{cases} \quad (15)$$

and

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \frac{1}{2}\ddot{h}_{rs} X^r X^s dT^2 + O(\xi^3, h^2). \quad (16)$$

The coordinate transformation (15) was first found by Ashby and Dreitlein in Ref. [18]. However, contrary to the claim of the authors, the metric (16) (that can be derived from (15)) is a Fermi metric in the sense of Manasse and Misner [16] only in the plane $Z = 0$, and not in the whole space.

Now that we have the metric tensor in the FC, we will compute the phase difference for several rigid interferometers.

4.2. The Michelson–Morley configuration

First we study the Michelson–Morley configuration of Fig. 2, but now we assume that the coordinates of the optical elements are constant in the FC. From Eqs. (2) and (16) we find

$$\Delta\phi = 4\pi h_+ \frac{L}{\lambda} \left(1 - \frac{V}{\Omega L} \sin \frac{\Omega L}{V} \right) \sin \Omega t \quad (17)$$

with the notations of Section 3.2. This formula is in agreement with the one obtained in [6]. The assumption $L \ll \Lambda$ implies $\Omega L/c \ll 2\pi$. Therefore, for a LWI, formula (17) reduces to

$$\Delta\phi_{\text{LW}} \simeq 0. \quad (18)$$

This result is well known: if the arms of a LWI were rigid there would be no signal. The situation is different for a MWI where we can consider two different regimes [6]:

- $L \ll \frac{v_0}{c} \Lambda$ (i.e., $\Omega L/V \ll 2\pi$): formula (17) reduces to $\Delta\phi_{\text{MW}} \simeq 0$. This regime occurs when the flight time of an atom in the interferometer is much less than the GW period. In this case there is no signal.
- $\frac{v_0}{c} \Lambda \ll L$ (i.e., $\Omega L/V \gg 2\pi$): one can assume $V/\Omega L \ll 1$. This regime occurs when the flight time is much longer than the period of the GW. In this case the amplitude of the phase difference in (17) reduces to

$$\widetilde{\Delta\phi}_{\text{MW}} \simeq 4\pi h_+ \frac{L}{\lambda}. \quad (19)$$

This new specific regime has no equivalent with free interferometers nor with a rigid LWI. One can notice that the present amplitude given by (19) is similar to formula (10). Unfortunately in the present regime the sensitivity is limited by the condition $v_0 \ll \Omega L$.

4.3. The Ramsey–Bordé configuration

We study now a MWI with a Ramsey–Bordé configuration [11,12,15] represented on Fig. 5. We define $X = X^1$ and $Y = X^2$. Atoms move along the X axis and we assume that $v_0 \ll c$. At the output of the interferometer, we calculate from Eqs. (2) and (16) the phase difference between the two beams

$$\Delta\phi = \Delta\phi_+ + \Delta\phi_\times \quad (20)$$

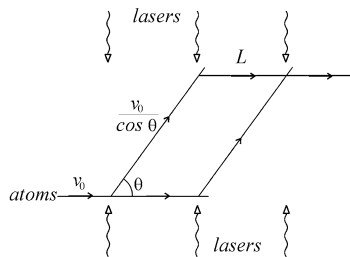


Fig. 5. Ramsey–Bordé interferometer in the X – Y plane.

with

$$\Delta\phi_+ = -4\pi h_+ \frac{L}{\lambda} \sin \psi \tan^2 \theta \times \left[\cos(\Omega t + \psi) + \frac{\sin \psi}{2\psi} \cos(\Omega t) \right], \quad (21)$$

$$\Delta\phi_\times = -4\pi h_\times \frac{L}{\lambda} \cos \psi \tan \theta \times \left[\sin(\Omega t + \varphi_\times - \psi) - \frac{\sin \psi}{\psi} \tan \psi \cos(\Omega t + \varphi_\times) \right], \quad (22)$$

where θ is the separation angle and $\psi = \frac{\Omega L}{2v_0}$.

The lasers give to the atoms a velocity $\Delta v = v_0 \tan \theta$ along the Y axis. In order to achieve a high value of θ , one must communicate to the atom a high momentum during the interactions with the photons. This is very difficult because this has to be done without any loss of coherence. The momentum of the photons being $\hbar k$, one can imagine to transfer $m\Delta v = N \times \hbar k$ to the atom. Significant results, $N \simeq 1000$, have already been obtained along this line of research [19,20]; they still remain insufficient today.

We assume now that $\theta \simeq \pi/4$ so that $\tan \theta \simeq 1$. Here again two regimes can be considered:

- $L \ll \frac{v_0}{c} \Lambda$ (i.e.) $\psi = \frac{\Omega L}{2v_0} \ll 2\pi$: in this case

$$\Delta\phi \simeq -4\pi h_\times \frac{L}{\lambda} \sin(\Omega t + \varphi_\times). \quad (23)$$

This expression results in an amplitude already given, formula (10) above. Therefore, Figs. 3 and 4 can be used for the discussion of the experimental design of the interferometer (with $h_+ \rightarrow h_\times$).

- $\frac{v_0}{c} \Lambda \ll L$ (i.e.) $2\pi \ll \frac{\Omega L}{2v_0} = \psi$: expression (20) gives

$$\Delta\phi \simeq -4\pi \frac{L}{\lambda} \left[h_+ \sin \psi \cos(\Omega t + \psi) + h_\times \cos \psi \sin(\Omega t + \varphi_\times - \psi) \right]. \quad (24)$$

The phase difference $\Delta\phi$ is a periodic function of the time whose amplitude displays the same order of magnitude that was previously put forward in expressions (10) and (23). Here, however, one can choose the value of ψ in order to measure h_+ or h_\times . This is a positive point but the sensitivity remains however limited by the low values of v_0 in this regime.

5. Conclusion

In this Letter we considered matter wave and light wave interferometers designed to detect gravitational waves. This has been considered already in the literature in some special cases [5–7] where several different claims correspond to different assumptions (more or less justified) about the coordinate systems comoving with the interferometer.

We considered “free” and “rigid” interferometers. The comoving coordinates have been chosen as Einstein coordinates in

the first case; it seems that this choice raises no discussion. The comoving coordinates have been chosen as Fermi-like coordinates in the second case. This choice is very natural because one can show that the first approximation of the equations of a continuous medium are ordinary nonrelativistic equations with just an extra gravitational force density (the mechanical detectors of gravitational waves are precisely based on such equations).

We have considered only plane interferometers orthogonal to the propagation of the gravitational waves. If we change the orientation of the interferometer relatively to the gravitational wave, the sensitivity is slightly modified but the orders of magnitude remain the same. Moreover we only considered periodic waves and no pulses of gravitational waves. We believe that the comparison between light-wave interferometers and matter-wave interferometers is not deeply affected by such a simplification.

In the cases that we studied we obtained an estimation of the sensitivity of matter-wave interferometers. We especially considered the shot noise limit, however, it is the thermal noise which most troublesome at the present moment. The answer of this problem could be the construction of a compact (one meter) interferometer which could be cooled at very low temperature. In order to estimate roughly the thermal noise we consider that the interferometer is fixed on a bench of mass $M \sim 500$ kg which displays an eigenfrequency of order $\omega_0 \sim 10^4$ s⁻¹. Therefore, following reference [13], one finds the limit:

$$h_{\min} \sim \frac{1}{L} \left(\frac{4k_B T}{MQ\omega_0^2 \Omega} \right)^{1/2}, \quad (25)$$

where k_B is the Boltzmann constant. With a quality factor $Q \sim 10^7$, and a temperature $T \sim 10^{-2}$ K one finds $h_{\min} \sim 10^{-20}$ for $\Omega \sim 10^{-2}$ s⁻¹.

Now if a clear conclusion had to be taken from the previous estimations, we would claim that in the future, compact, very low temperature matter-wave interferometers will not be a

serious challenger to high frequency detectors of gravitational waves (such as Virgo or LIGO) but to LISA. Of course major improvements still remain necessary today.

References

- [1] LIGO Collaboration, B. Abbott, et al., Phys. Rev. D 72 (2005) 122004.
- [2] LIGO Collaboration, B. Abbott, et al., Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 221101.
- [3] LIGO Collaboration, B. Abbott, et al., Phys. Rev. D 69 (2004) 082004.
- [4] ESA-SCI, LISA: A Cornerstone Mission for the observation of gravitational waves, Tech. rep., ESA-SCI, http://ftp.rzg.mpg.de/pub/grav/lisa/sts/sts_1.05.pdf (2000).
- [5] R.Y. Chiao, A.D. Spiliotopoulos, J. Mod. Opt. 51 (2004) 861.
- [6] A. Roura, D.R. Brill, B.L. Hu, C.W. Misner, W.D. Phillips, Gravitational wave detectors based on matter wave interferometers (MIGO) are no better than laser interferometers (LIGO), ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints.
- [7] S. Foffa, A. Gasparini, M. Papucci, R. Sturani, Phys. Rev. D 73 (2006) 022001.
- [8] B. Linet, P. Tourrenc, Can. J. Phys. 54 (1976) 1129.
- [9] L. Stodolsky, Gen. Relativ. Gravit. 11 (1979) 391.
- [10] M. Barone, G. Calamai, M. Mazzoni, R. Stanga, F. Vetrano (Eds.), Experimental Physics of Gravitational Waves, 2000.
- [11] D.W. Keith, C.R. Ekstrom, Q.A. Turchette, D.E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2693.
- [12] T.L. Gustavson, A. Landragin, M.A. Kasevich, Class. Quantum Grav. 17 (2000) 2385.
- [13] M. Punturo, The Virgo sensitivity curve, Virgo note, code: VIR-NOTPER-1390-51.
- [14] M. Arndt, L. Hackermüller, E. Reiger, Braz. J. Phys. 35 (2005) 216.
- [15] E.M. Rasel, M.K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 2633.
- [16] F.K. Manasse, C.W. Misner, J. Math. Phys. 4 (1963) 735; URL <http://link.aip.org/link/?JMP/4/735/1>.
- [17] P.L. Fortini, C. Gualdi, Nuovo Cimento B 71 (1982) 37.
- [18] N. Ashby, J. Dreitlein, Phys. Rev. D 12 (1975) 336.
- [19] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 253001.
- [20] P. Cladé, Oscillations de Bloch d'atomes ultrafroids et mesures de la constante de structure fine, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, October 2005, see http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/01/07/30/index_fr.html.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Archive for the History of Quantum Physics (AHQP), interview with Klein, 1963.
- [2] B. ABBOTT *et al.* : Search for gravitational waves from binary black hole inspirals in LIGO data. *Phys. Rev. D*, 73(6):062001–+, mars 2006.
- [3] B. ABBOTT *et al.* : A Joint Search for Gravitational Wave Bursts with AURIGA and LIGO. *ArXiv gr-qc*, 07100497, oct. 2007.
- [4] B. ABBOTT *et al.* : Search for gravitational-wave bursts in ligo data from the fourth science run. *ArXiv gr-qc*, 07040943, 2007.
- [5] B. ABBOTT *et al.* : Search for gravitational wave radiation associated with the pulsating tail of the SGR 1806-20 hyperflare of 27 December 2004 using LIGO. *Phys. Rev. D*, 76(6):062003–+, sept. 2007.
- [6] B. ABBOTT *et al.* : Search for gravitational waves associated with 39 gamma-ray bursts using data from the second, third, and fourth ligo runs. *in preparation*, 2007.
- [7] B. ABBOTT *et al.* : Search for gravitational waves from binary inspirals in s3 and s4 ligo data. *ArXiv gr-qc*, 07043368, 2007.
- [8] B. ABBOTT *et al.* : Searching for a Stochastic Background of Gravitational Waves with the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. *Astrophys. J.*, 659:918–930, avr. 2007.
- [9] B. ABBOTT *et al.* : Upper limits on gravitational wave emission from 78 radio pulsars. *Phys. Rev. D*, 76(4):042001–+, août 2007.
- [10] F. ACERNESE *et al.* : Analysis of noise lines in the Virgo C7 data. *Class. Quantum Grav.*, 24:433–+, oct. 2007.
- [11] F. ACERNESE *et al.* : Coincidence analysis between periodic source candidates in C6 and C7 Virgo data. *Class. Quantum Grav.*, 24:491–+, oct. 2007.
- [12] F. ACERNESE *et al.* : Data quality studies for burst analysis of Virgo data acquired during Weekly Science Runs. *Class. Quantum Grav.*, 24:415–+, oct. 2007.

- [13] F. ACERNESE *et al.* : First joint Gravitational Waves search by the Auriga-Explorer-Nautilus-Virgo collaboration. *ArXiv gr-qc*, 07103752, oct. 2007.
- [14] F. ACERNESE *et al.* : Gravitational waves by gamma-ray bursts and the Virgo detector : the case of GRB 050915a. *Class. Quantum Grav.*, 24:671—+, oct. 2007.
- [15] F. ACERNESE *et al.* : Status of Virgo detector. *Class. Quantum Grav.*, 24:381—+, oct. 2007.
- [16] E. G. ADELBERGER, B. R. HECKEL et A. E. NELSON : Tests of the Gravitational Inverse-Square Law. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53:77–121, déc. 2003.
- [17] B. ALLEN : The Stochastic Gravity-Wave Background : Sources and Detection. In J. A. MIRALLES, J. A. MORALES et D. SAEZ, édés : *Some Topics on General Relativity and Gravitational Radiation*, p. 3—+, 1997.
- [18] Z. A. ALLEN *et al.* : First Search for Gravitational Wave Bursts with a Network of Detectors. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5046–5050, déc. 2000.
- [19] M. B. AL'TAIE : Bose-Einstein condensation in an Einstein universe. *J. Phys. A*, 11:1603–1620, août 1978.
- [20] P. AMARO-SEOANE, J. R. GAIR, M. FREITAG, M. C. MILLER, I. MANDEL, C. J. CUTLER et S. BABAK : TOPICAL REVIEW : Intermediate and extreme mass-ratio inspirals astrophysics, science applications and detection using LISA. *Class. Quantum Grav.*, 24:113—+, sept. 2007.
- [21] AMERICAN PHYSICAL SOCIETY : Gp-b talks & poster presentations at the april aps meeting, 2007. URL http://einstein.stanford.edu/content/aps_posters/.
- [22] M.-C. ANGONIN, P. TOURENC et P. DELVA : Cold atom interferometer in a satellite : orders of magnitude of the tidal effect. *Appl. Phys. B*, p. 34—+, août 2006.
- [23] M.-C. ANGONIN-WILLAIME, X. OVIDO et P. TOURENC : Gravitational Perturbations on Local Experiments in a Satellite : The Dragging of Inertial Frame in the HYPER Project. *Gen. Rel. Grav.*, 36:411–434, fév. 2004.
- [24] C. ANTOINE : Matter wave beam splitters in gravito-inertial and trapping potentials : generalized ttt scheme for atom interferometry. *Appl. Phys. B*, 84:585–597, sept. 2006.
- [25] C. ANTOINE et C. J. BORDE : Quantum theory of atomic clocks and gravito-inertial sensors : an update. *J. Opt. B*, 5:199—+, avr. 2003.

- [26] H. ARAÚJO, C. BOATELLA, M. CHMEISSANI, A. CONCHILLO, E. GARCÍA-BERRO, C. GRIMANI, W. HAJDAS, A. LOBO, L. MARTÍNEZ, M. NOFRARIAS, J. A. ORTEGA, C. PUIGDENGOLÉS, J. RAMOS-CASTRO, J. SANJUÁN, P. WASS et X. XIRGU : LISA and LISA PathFinder, the endeavour to detect low frequency GWs. *J. Phys. Conf. Ser.*, 66:2003–+, mai 2007.
- [27] M. ARNDT, L. HACKERMÜLLER et E. REIGER : Interferometry with Large Molecules : Exploration of Coherence, Decoherence and Novel Beam Methods. *Braz. J. Phys.*, 35:216–223, juin 2005.
- [28] N. ASHBY et B. BERTOTTI : Relativistic effects in local inertial frames. *Phys. Rev. D*, 34:2246–2259, oct. 1986.
- [29] N. ASHBY et J. DREITLEIN : Gravitational wave reception by a sphere. *Phys. Rev. D*, 12:336–349, juil. 1975.
- [30] P. ASTONE *et al.* : Status report on the EXPLORER and NAUTILUS detectors and the present science run. *Class. Quantum Grav.*, 23:57–+, avr. 2006.
- [31] S. BAESSLER, B. HECKEL, E. ADELBERGER, J. GUNDLACH, U. SCHMIDT et H. SWANSON : Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3585–3588, 1999.
- [32] R. BALLANTINI, P. BERNARD, E. CHIAVERI, A. CHINCARINI, G. GEMME, R. LOSITO, R. PARODI et E. PICASSO : A detector of high frequency gravitational waves based on coupled microwave cavities. *Class. Quantum Grav.*, 20:3505–3522, août 2003.
- [33] R. BALLANTINI, P. BERNARD, A. CHINCARINI, G. GEMME, R. PARODI et E. PICASSO : Electromagnetic characterization of superconducting radio-frequency cavities for gw detection. *Class. Quantum Grav.*, 21:1241–+, mars 2004.
- [34] V. I. BALYKIN et V. S. LETOKHOV : Atomic cavity with light-induced mirrors. *Appl. Phys. B*, 48:517–523, juin 1989.
- [35] V. I. BALYKIN, V. G. MINOGIN et V. S. LETOKHOV : Electromagnetic trapping of cold atoms. *Rep. Prog. Phys.*, 63:1429–1510, sept. 2000.
- [36] M. BARONE, G. CALAMAI, M. MAZZONI, R. STANGA et F. VETRANO, édés. *Experimental Physics of Gravitational Waves*, 2000.
- [37] D. BARTLETT et D. VAN BUREN : Equivalence of active and passive gravitational mass using the moon. *Phys. Rev. Lett.*, 57:21–24, 1986.

- [38] R. BATTESTI, P. CLADÉ, S. GUELLATI-KHÉLIFA, C. SCHWOB, B. GRÉMAUD, F. NEZ, L. JULIEN et F. BIRABEN : Bloch Oscillations of Ultracold Atoms : A Tool for a Metrological Determination of h/m_{Rb} . *Phys. Rev. Lett.*, 92(25):253001, juin 2004.
- [39] A. BAUCH et S. WEYERS : New experimental limit on the validity of local position invariance. *Phys. Rev. D*, 65(8):081101–+, avr. 2002.
- [40] F. BEAUVILLE *et al.* : Benefits of joint LIGO - Virgo coincidence searches for burst and inspiral signals. *J. Phys. Conf. Ser.*, 32:212–222, mars 2006.
- [41] F. BEAUVILLE *et al.* : A comparison of methods for gravitational wave burst searches from LIGO and Virgo. *ArXiv gr-qc*, 0701026, jan. 2007.
- [42] F. BEAUVILLE *et al.* : Detailed comparison of LIGO and Virgo Inspiral Pipelines in Preparation for a Joint Search. *ArXiv gr-qc*, 0701027, jan. 2007.
- [43] P. R. BERMAN, éd. *Atom Interferometry*. Academic Press, 1996.
- [44] B. BERTOTTI, L. IESS et P. TORTORA : A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, September 2003.
- [45] L. BILDSTEN : Gravitational Radiation and Rotation of Accreting Neutron Stars. *Astrophys. J. Lett.*, 501:L89+, juil. 1998.
- [46] S. BONAZZOLA et E. GOURGOULHON : Gravitational Waves from Neutron Stars. In J.-A. MARCK et J.-P. LASOTA, édés : *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, p. 151–+, 1997.
- [47] K. BONGS et K. SENGSTOCK : Physics with coherent matter waves. *Reports of Progress in Physics*, 67:907–963, juin 2004.
- [48] C. J. BORDÉ : Atomic interferometry with internal state labelling. *Phys. Lett. A*, 140:10–12, sept. 1989.
- [49] C. J. BORDÉ : *Matter-Wave Interferometers : A Synthetic Approach*, p. 257–292. 22. Academic Press, 1997.
- [50] C. J. BORDÉ : Theoretical tools for atom optics and interferometry. *C. R. Acad. Sci. Paris, Phys.*, 2:509–530, avril 2001.
- [51] C. J. BORDÉ : Quantum Theory of Atom-Wave Beam Splitters and Application to Multidimensional Atomic Gravito-Inertial Sensors. *Gen. Rel. Grav.*, 36:475–502, mars 2004.

- [52] C. J. BORDÉ, J.-C. HOUARD et A. KARASIEWICZ : Relativistic Phase Shifts for Dirac Particles Interacting with Weak Gravitational Fields in Matter-Wave Interferometers. *In* C. LÄMMERZAHN, C. W. F. EVERITT et F. W. HEHL, eds : *LNP Vol. 562 : Gyros, Clocks, Interferometers ... : Testing Relativistic Gravity in Space*, p. 403–+, 2001.
- [53] C. J. BORDÉ, A. KARASIEWICZ et P. TOURENC : General Relativistic Framework for Atomic Interferometry. *Int. J. Mod. Phys. D*, 3:157–161, 1994.
- [54] V. B. BRAGINSKII, L. P. GRISHCHUK, A. G. DOROSHKEVICH, I. B. ZELDOVICH, I. D. NOVIKOV et M. V. SAZHIN : Electromagnetic detectors of gravitational waves. *Sov. J. Exp. Th. Ph.*, 38:865–869, may 1974.
- [55] V. B. BRAGINSKII et M. V. MENSII : High-frequency Detection of Gravitational Waves. *Sov. J. Exp. Th. Ph. Lett.*, 13:585–587, juin 1971.
- [56] V. B. BRAGINSKII et V. I. PANOV : Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. *Sov. J. Exp. Th. Ph.*, 34:463–466, 1972.
- [57] V. B. BRAGINSKII, Y. I. VORONTSOV et F. Y. KHALILI : Optimal quantum measurements in detectors of gravitation radiation. *Sov. J. Exp. Th. Ph. Lett.*, 27:276–+, mars 1978.
- [58] A. BRILLET et J. L. HALL : Improved laser test of the isotropy of space. *Phys. Rev. Lett.*, 42:549–552, fév. 1979.
- [59] G. BRODIN et M. MARKLUND : Gravitational wave detection using electromagnetic modes in a resonance cavity . *Class. Quantum Grav.*, 20:L45–L51, mars 2003.
- [60] A. BUONANNO : TASI Lectures on Gravitational Waves from the Early Universe. *ArXiv gr-qc*, 0303085, mars 2003.
- [61] M. BURGAY, N. D’AMICO, A. POSSENTI, R. MANCHESTER, A. LYNE, B. JOSHI, M. McLAUGHLIN, M. KRAMER, J. SARKISSIAN, F. CAMILO, V. KALOGERA, C. KIM et D. LORIMER : An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system. *Nature*, 426:531–533, 2003.
- [62] Y. Q. CAI et G. PAPINI : Particle interferometry in weak gravitational fields. *Class. Quantum Grav.*, 6:407–418, mars 1989.
- [63] B. CANUEL, F. LEDUC, D. HOLLEVILLE, A. GAUGUET, J. FILS, A. VIRDIS, A. CLAIRON, N. DIMARCQ, C. J. BORDÉ, A. LANDRAGIN et P. BOUYER : Six-Axis Inertial Sensor Using Cold-Atom Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 97(1):010402–+, juil. 2006.

- [64] O. CARNAL et J. MLYNEK : Young's double-slit experiment with atoms - A simple atom interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2689–2692, mai 1991.
- [65] Y. CASTIN : Course 1 : Bose-Einstein Condensates in Atomic Gases : Simple Theoretical Results. In R. KAISER, C. WESTBROOK et F. DAVID, édés : *Coherent atomic matter waves. Editors : R. Kaiser, C. Westbrook, F. David, Les Houches Summer School, vol. 72, p.1*, p. 1–+, 2001.
- [66] C. M. CAVES : Microwave cavity gravitational radiation detectors. *Phys. Lett. B*, 80:323–326, 1979.
- [67] P. CHEINET, F. PEREIRA DOS SANTOS, T. PETELSKI, J. LE GOUËT, J. KIM, K. T. THERKILDSEN, A. CLAIRON et A. LANDRAGIN : Compact laser system for atom interferometry. *Appl. Phys. B*, 84:643–646, sept. 2006.
- [68] R. Y. CHIAO et A. D. SPELIOTOPOULOS : A crystal-based matter-wave interferometric gravitational-wave observatory. In P. CHEN et K. REIL, édés : *Quantum Aspects of Beam Physics 2003 : Proceedings of the Joint 28th ICFA Advanced Beam Dynamics and Advanced & Novel Accelerators Workshop*, p. 241–258. World Scientific Publishing Company, oct. 2004.
- [69] R. Y. CHIAO et A. D. SPELIOTOPOULOS : Towards MIGO, the matter-wave interferometric gravitational-wave observatory, and the intersection of quantum mechanics with general relativity. *J. Mod. Opt.*, 51:861–899, juin 2004.
- [70] S. CHOI, D. STROMBERG et B. SUNDARAM : An Atom Laser is not monochromatic. *ArXiv e-prints*, 07105506, oct. 2007.
- [71] T. E. CHUPP, R. J. HOARE, R. A. LOVEMAN, E. R. OTEIZA, J. M. RICHARDSON, M. E. WAGSHUL et A. K. THOMPSON : Results of a new test of local Lorentz invariance : A search for mass anisotropy in ^{21}Ne . *Phys. Rev. Lett.*, 63:1541–1545, oct. 1989.
- [72] I. CIUFOLINI : Measurement of the Lense-Thirring drag on high-altitude, laser-ranged artificial satellites. *Phys. Rev. Lett.*, 56:278–281, jan. 1986.
- [73] I. CIUFOLINI : Dragging of inertial frames. *Nature*, 449:41–47, sept. 2007.
- [74] I. CIUFOLINI, D. LUCCHESI, F. VESPE et A. MANDIELLO : Measurement of dragging of inertial frames and gravitomagnetic field using laser-ranged satellites. *Nuovo Cimento A Serie*, 109:575–590, mai 1996.
- [75] I. CIUFOLINI et E. C. PAVLIS : A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. *Nature*, 431:958–960, oct. 2004.

- [76] I. CIUFOLINI, E. C. PAVLIS et R. PERON : Determination of frame-dragging using Earth gravity models from CHAMP and GRACE. *New Astronomy*, 11:527–550, juil. 2006.
- [77] P. CLADÉ : *Oscillations de Bloch d’atomes ultrafroids et mesures de la constante de structure fine*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, oct. 2005. URL http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/01/07/30/index_fr.html.
- [78] R. COLELLA, A. W. OVERHAUSER et S. A. WERNER : Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference. *Phys. Rev. Lett.*, 34:1472–1474, juin 1975.
- [79] D. COLLADAY et V. A. KOSTELECKÝ : Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58(11):116002–+, déc. 1998.
- [80] R. COQUEREAUX : Espaces fibrés et connections, 2002. URL <http://www.cpt.univ-mrs.fr/%7Ecoque/link-to-book.html>.
- [81] E. A. CORNELL, J. R. ENSHER et C. E. WIEMAN : Experiments in Dilute Atomic Bose-Einstein Condensation. In *Proceedings of the Enrico Fermi summer school, Varenna, Italy, 1998.*, 1999.
- [82] C. CUTLER : Gravitational waves from neutron stars with large toroidal B fields. *Phys. Rev. D*, 66(8):084025–+, oct. 2002.
- [83] C. CUTLER et K. S. THORNE : An Overview of Gravitational-Wave Sources. *ArXiv gr-qc*, 0204090, 2002.
- [84] K. DANZMANN et A. RÜDIGER : LISA technology - concept, status, prospects. *Class. Quantum Grav.*, 20:1–+, mai 2003.
- [85] C. DAVISSON et L. H. GERMER : Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel. *Phys. Rev.*, 30:705–740, déc. 1927.
- [86] L. de BROGLIE : Recherches sur la théorie des quanta. *Ann. Phys.*, III(10-ème série):22–128, 1925.
- [87] L. de BROGLIE : Remarque sur la nouvelle mécanique ondulatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Phys.*, 183:272–274, jul 1926.
- [88] W. DE SITTER : On Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 77:155–184, déc. 1916.

- [89] R. S. DECCA, D. LÓPEZ, H. B. CHAN, E. FISCHBACH, D. E. KRAUSE et C. R. JAMELL : Constraining New Forces in the Casimir Regime Using the Isoelectronic Technique. *Phys. Rev. Lett.*, 94(24):240401—+, juin 2005.
- [90] R. S. DECCA, D. LÓPEZ, E. FISCHBACH, G. L. KLIMCHITSKAYA, D. E. KRAUSE et V. M. MOSTEPANENKO : Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates. *Phys. Rev. D*, 75(7):077101—+, avr. 2007.
- [91] W. T. S. DEICH et S. R. KULKARNI : The Masses of the Neutron Stars in M15C. In J. VAN PARADIJS, E. P. J. VAN DEN HEUVEL et E. KUULKERS, édés : *Compact Stars in Binaries*, vol. 165 de *IAU Symposium*, p. 279—+, 1996.
- [92] P. DELVA, M.-C. ANGONIN et P. TOURENC : A comparison between matter wave and light wave interferometers for the detection of gravitational waves. *Phys. Lett. A*, 357:249–254, sept. 2006.
- [93] P. DELVA, M.-C. ANGONIN et P. TOURENC : Matter waves : a new tool for the detection of Gravitational Waves? In D. BARRET, F. CASOLI, G. LAGACHE, A. LECAVELIER et L. PAGANI, édés : *SF2A-2006 : Semaine de l'Astrophysique Française*, p. 15—+, juin 2006.
- [94] P. DELVA, M.-C. ANGONIN et P. TOURENC : Matter waves and the detection of Gravitational Waves. In *Journal of Physics Conference Series*, vol. 66, p. 2050—+, mai 2007.
- [95] P. DELVA, M.-C. ANGONIN et P. TOURENC : The detection of gravitational waves with matter wave interferometers. In H. KLEINERT, R. JANTZEN et R. RUFFINI, édés : *Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*. World Scientific, Singapore, 2007.
- [96] S. DIMOPOULOS, P. W. GRAHAM, J. M. HOGAN et M. A. KASEVICH : Testing General Relativity with Atom Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 98(11):111102—+, mars 2007.
- [97] R. W. P. DREVER : A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique. *Philos. Mag.*, 6:683–687, 1961.
- [98] EGO : h, the gravitational voice. News from EGO and Virgo. Number 6., oct. 2007. URL http://www.ego-gw.it/public/hletter/doc/h_6_OCTOBER2007.pdf.
- [99] A. EINSTEIN : über das Relativitätsprinzip und die aus denselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411–462, 1907. Traduit dans [100].

- [100] A. EINSTEIN et F. BALIBAR : *Oeuvres Choiesies, tome 2 : Relativités I*. 1999.
- [101] ESA-SCI : LISA : A Cornerstone Mission for the Observation of Gravitational Waves. Rap. tech., ESA-SCI, ftp ://ftp.rzg.mpg.de/pub/grav/lisa/sts/sts_1.05.pdf, 2000.
- [102] V. FAFONE : Resonant-mass detectors : status and perspectives. *Class. Quantum Grav.*, 21:377–+, mars 2004.
- [103] V. FAFONE : Developments in resonant-mass detectors. *Class. Quantum Grav.*, 23:223–+, avr. 2006.
- [104] A. FAULKNER *et al.* : PSR J1756–2251 : A New Relativistic Double Neutron Star System. *Astrophys. J. Lett.*, 618:L119–L122, 2005.
- [105] E. FERMI : Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. *Atti R. Accad. Lincei Rend, Cl. Fis. Mat. Nat.*, 31:21–3, 1922.
- [106] E. FERMI : Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. *Atti R. Accad. Lincei Rend, Cl. Fis. Mat. Nat.*, 31:51–2, 1922.
- [107] E. FERMI : Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. *Atti R. Accad. Lincei Rend, Cl. Fis. Mat. Nat.*, 31:101–3, 1922.
- [108] A. FIENGA, H. MANCHE, J. LASKAR et M. GASTINEAU : INPOP06 : a new numerical planetary ephemeris. *Astronomy and Astrophysics*, 477:315–327, jan. 2008.
- [109] É. É. FLANAGAN et S. A. HUGHES : The basics of gravitational wave theory. *New Journal of Physics*, 7:204–+, sept. 2005.
- [110] V. FOCK : Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. *Z. Phys.*, 38(3):242–250, jun 1926.
- [111] S. FOFFA, A. GASPARINI, M. PAPUCCI et R. STURANI : Sensitivity of a small matter-wave interferometer to gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 73(2):022001–+, jan. 2006.
- [112] S. FOFFA, M. PAPUCCI et R. STURANI : The gravitational phase shift in a matter-wave interferometer (MIGO). *ArXiv gr-qc*, 0409099, sept. 2004.
- [113] P. FORTINI, R. ONOFRIO et A. RIOLI : The uncertainty principle in resonant gravitational wave antennae and quantum non-demolition measurement schemes. In *NASA. Goddard Space Flight Center, The Second International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations*, p. 209–224, 1993.
- [114] P. L. FORTINI et C. GUALDI : Fermi normal co-ordinate system and electromagnetic detectors of gravitational waves. I - Calculation of the metric. *Nuovo Cim. B*, 71:37–54, sept. 1982.

- [115] S. FRAY, C. A. DIEZ, T. W. HÄNSCH et M. WEITZ : Atomic Interferometer with Amplitude Gratings of Light and Its Applications to Atom Based Tests of the Equivalence Principle. *Phys. Rev. Lett.*, 93(24):240404–+, déc. 2004.
- [116] M. FROESCHLÉ, F. MIGNARD et F. ARENOU : Determination of the ppn parameter γ with the hipparcos data. In *Proceedings from the Hipparcos Venice '97 Symposium*, Noordwijk, Netherlands, 1997. ESA. URL <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/venice.html>.
- [117] C. L. FRYER et A. HEGER : Core-Collapse Simulations of Rotating Stars. *Astrophys. J.*, 541:1033–1050, oct. 2000.
- [118] C. L. FRYER, D. E. HOLZ et S. A. HUGHES : Gravitational Wave Emission from Core Collapse of Massive Stars. *Astrophys. J.*, 565:430–446, jan. 2002.
- [119] C. L. FRYER, D. E. HOLZ et S. A. HUGHES : Gravitational Waves from Stellar Collapse : Correlations to Explosion Asymmetries. *Astrophys. J.*, 609:288–300, juil. 2004.
- [120] N. GEHRELS *et al.* : A new γ -ray burst classification scheme from GRB060614. *Nature*, 444:1044–1046, déc. 2006.
- [121] U. H. GERLACH : Cavity quantum-electrodynamical response to a gravitational wave. *Phys. Rev. D*, 46:1239–1262, août 1992.
- [122] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD et L. MACCONE : Quantum-Enhanced Measurements : Beating the Standard Quantum Limit. *Science*, 306:1330–1336, nov. 2004.
- [123] W. GORDON : Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Z. Phys.*, 40 (1):117–133, sep 1926.
- [124] É. GOURGOULHON : Relativité générale, 2006. URL <http://www.luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>.
- [125] N. GRAFE et H. DEHNEN : The interaction of a quantum mechanical oscillator with gravitational radiation. *Int. J. Theor. Phys.*, 15:393–409, 1976.
- [126] P. GRANGIER, J.-F. ROCH et G. ROGER : Observation of backaction-evading measurement of an optical intensity in a three-level atomic nonlinear system. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1418–1421, mars 1991.
- [127] L. P. GRISHCHUK : Gravitational waves in the cosmos and the laboratory. *Soviet Physics Uspekhi*, 121:629–656, avr. 1977.

- [128] L. P. GRISHCHUK : Experiments on Gravitational Waves with Electromagnetic Detectors. In E. SCHMUTZER, éd. : *General Relativity and Gravitation 1980, proceedings of the 9th International Conference on General Relativity and Gravitation, held July 14-19, 1980, in Jena.*, p. 255–+. Cambridge University Press, Cambridge, England., 1983.
- [129] L. P. GRISHCHUK et A. G. POLNAREV : Gravitational Waves and Their Interaction with Matter and Fields. In A. HELD, éd. : *General relativity and gravitation, one hundred years after the birth of Albert Einstein, vol. 2*, p. 393–+. Plenum Press, 1980.
- [130] T. L. GUSTAVSON, P. BOUYER et M. A. KASEVICH : Dual-atomic-beam matter-wave gyroscope. In B. L. FEAREY, éd. : *Proc. SPIE Vol. 3270, p. 62-69, Methods for Ultrasensitive Detection, Bryan L. Fearey; Ed.*, vol. 3270 de *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*, p. 62–69, mai 1998.
- [131] T. L. GUSTAVSON, A. LANDRAGIN et M. A. KASEVICH : Rotation sensing with a dual atom-interferometer Sagnac gyroscope . *Class. Quantum Grav.*, 17:2385–2398, juin 2000.
- [132] M. P. HAUGAN et C. M. WILL : Modern tests of special relativity. *Physics Today*, 40:69–76, 1987.
- [133] C. D. HOYLE, D. J. KAPNER, B. R. HECKEL, E. G. ADELBERGER, J. H. GUNDLACH, U. SCHMIDT et H. E. SWANSON : Submillimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev. D*, 70(4):042004–+, août 2004.
- [134] S. A. HUGHES : Untangling the merger history of massive black holes with LISA. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 331:805–816, avr. 2002.
- [135] V. W. HUGHES, H. G. ROBINSON et V. BELTRAN-LOPEZ : Upper Limit for the Anisotropy of Inertial Mass from Nuclear Resonance Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 4:342–344, avr. 1960.
- [136] M.-T. JAEKEL et S. REYNAUD : Gravity Tests in the Solar System and the Pioneer Anomaly. *Modern Physics Letters A*, 20:1047–1055, 2005.
- [137] D. I. JONES : Gravitational waves from rotating strained neutron stars . *Class. Quantum Grav.*, 19:1255–1265, avr. 2002.
- [138] D. J. KAPNER, T. S. COOK, E. G. ADELBERGER, J. H. GUNDLACH, B. R. HECKEL, C. D. HOYLE et H. E. SWANSON : Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale. *Phys. Rev. Lett.*, 98(2):021101–+, jan. 2007.

- [139] M. KASEVICH et S. CHU : Atomic interferometry using stimulated Raman transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 67:181–184, juil. 1991.
- [140] S. KAWAMURA *et al.* : The Japanese space gravitational wave antenna DECIGO. *Class. Quantum Grav.*, 23:125–+, avr. 2006.
- [141] D. W. KEITH, C. R. EKSTROM, Q. A. TURCHETTE et D. E. PRITCHARD : An interferometer for atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2693–2696, mai 1991.
- [142] W. KETTERLE, D. S. DURFEE et D. M. STAMPER-KURN : Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In *Proceedings of the Enrico Fermi summer school, Varenna, Italy, 1998.*, 1999.
- [143] K. KIRSTEN et D. J. TOMS : Bose-Einstein condensation for interacting scalar fields in curved spacetime. *Phys. Rev. D*, 51:6886–6900, juin 1995.
- [144] H. KRAGH : Equation with the many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926. *Am. J. Phys.*, 52:1024–1033, nov. 1984.
- [145] A. LA PORTA, R. E. SLUSHER et B. YURKE : Back-action evading measurements of an optical field using parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 62:28–31, jan. 1989.
- [146] A. LAMBRECHT, V. V. NESVIZHEVSKY, R. ONOFRIO et S. REYNAUD : Development of a high-sensitivity torsional balance for the study of the Casimir force in the 1 10 micrometre range. *Class. Quantum Grav.*, 22:5397–5406, déc. 2005.
- [147] B. LAMINE : *Effets physiques des fonds d'ondes gravitationnelles : décohérence intrinsèque dans les interféromètres*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004.
- [148] B. LAMINE, R. HERVÉ, A. LAMBRECHT et S. REYNAUD : Decoherence induced by stochastic background of gravitational waves on matter-wave interferometers. *Appl. Phys. B*, 84:575–578, sept. 2006.
- [149] B. LAMINE, M.-T. JAEKEL et S. REYNAUD : Gravitational decoherence of atomic interferometers. *Eur. Phys. J. B*, 20:165–176, 2002.
- [150] S. K. LAMOREAUX, J. P. JACOBS, B. R. HECKEL, F. J. RAAB et E. N. FORTSON : New limits on spatial anisotropy from optically-pumped sup²⁰¹Hg and ¹⁹⁹Hg. *Phys. Rev. Lett.*, 57:3125–3128, déc. 1986.
- [151] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : *Physique Théorique Tome 3 : Mécanique Quantique*. 1975.

- [152] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ : *Physique Théorique Tome 2 : Théorie des champs*. 1982.
- [153] F. LEDUC : *Caractérisation d'un capteur inertiel à atomes froids*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2004.
- [154] J. LENSE et H. THIRRING : Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen. *Phys. Z.*, 19:156–163, mars 1918.
- [155] M. D. LEVENSON, R. M. SHELBY, M. REID et D. F. WALLS : Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2473–2476, nov. 1986.
- [156] B. LINET et P. TEYSSANDIER : Time transfer and frequency shift to the order $1/c^4$ in the field of an axisymmetric rotating body. *Phys. Rev. D*, 66(2):024045–+, juil. 2002.
- [157] B. LINET et P. TOURENC : Changement de phase dans un champ de gravitation : Possibilité de détection interférentielle. *Can. J. Phys.*, 54:1129, juin 1976.
- [158] M. MAGGIORE : Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Physics Reports*, 331:283–367, 2000.
- [159] H. MAIER-LEIBNITZ et T. SPRINGER : Ein interferometer für langsame neutronen. *Z. Phys.*, 167:386–402, 1962.
- [160] F. K. MANASSE et C. W. MISNER : Fermi Normal Coordinates and Some Basic Concepts in Differential Geometry. *J. Math. Phys.*, 4(6):735–745, 1963. URL <http://link.aip.org/link/?JMP/4/735/1>.
- [161] K.-P. MARZLIN : Fermi coordinates for weak gravitational fields. *Phys. Rev. D*, 50:888–891, juil. 1994.
- [162] K.-P. MARZLIN : The physical meaning of Fermi coordinates. *Gen. Rel. Grav.*, 26:619 – 636, juin 1994.
- [163] D. MATTINGLY : Modern tests of lorentz invariance. *Living Reviews in Relativity*, 8 (5), 2005. URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2005-5>.
- [164] R. MECHERI, T. ABDELATIF, A. IRBAH, J. PROVOST et G. BERTHOMIEU : New values of gravitational moments j_2 and j_4 deduced from helioseismology. *Solar Phys.*, 222:191–197, 2004.
- [165] A. MESSIAH : *Mécanique Quantique Tome 2*. 1995.

- [166] T. P. MEYRATH, F. SCHRECK, J. L. HANSSEN, C.-S. CHUU et M. G. RAIZEN : Bose-Einstein condensate in a box. *Phys. Rev. A*, 71(4):041604–+, avr. 2005.
- [167] P. MEYSTRE et M. O. SCULLY, éd. *Quantum optics. Experimental gravity, and measurement theory*, 1983.
- [168] A. MIFFRE, M. JACQUEY, M. BÜCHNER, G. TRÉNEC et J. VIGUÉ : Atom interferometry. *Phys. Scr.*, 74:C15–C23, août 2006.
- [169] C. W. MISNER, K. S. THORNE et J. A. WHEELER : *Gravitation*. San Francisco : W.H. Freeman and Co., 1973, 1973.
- [170] G. P. MURTAS et THE ROG COLLABORATION : Correlations between Coincidences of Gravitational Waves Nautilus and Explorer and X-ray Emission of 4U1820 30 and XTE J1550 564. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics Supplement*, 6:63–72, déc. 2006.
- [171] W.-T. NI et M. ZIMMERMANN : Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer. *Phys. Rev. D*, 17:1473–1476, mars 1978.
- [172] A. M. NOBILI : Precise gravitation measurements on Earth and in space : Tests of the Equivalence Principle. In T. J. QUINN, S. LESCHIUTTA et P. TAVELLA, éd. : *Recent Advances in Metrology and Fundamental Constants*, p. 609–+, 2001.
- [173] R. NOOMEN, S. KLOSKO, C. NOLL et M. PEARLMAN, éd. *Toward Millimeter accuracy. Proc. 13th Int. Laser Ranging Workshop (NASA Goddard, Greenbelt, Maryland)*, 2003.
- [174] K. NORDTVEDT : Equivalence principle for massive bodies. i. phenomenology. *Phys. Rev.*, 169:1014–1016, 1968.
- [175] R. A. NYMAN, G. VAROQUAUX, F. LIENHART, D. CHAMBON, S. BOUSSEN, J.-F. CLÉMENT, T. MÜLLER, G. SANTARELLI, F. PEREIRA DOS SANTOS, A. CLAIRON, A. BRESSON, A. LANDRAGIN et P. BOUYER : I.C.E. : a transportable atomic inertial sensor for test in microgravity. *Appl. Phys. B*, 84:673–681, sept. 2006.
- [176] F. PEGORARO, E. PICASSO et L. A. RADICATI : On the operation of a tunable electromagnetic detector for gravitational waves. *J. Phys. A*, 11:1949–1962, oct. 1978.
- [177] F. PEGORARO, L. A. RADICATI, P. BERNARD et E. PICASSO : Electromagnetic detector for gravitational waves. *Phys. Lett. A*, 68:165–168, sept. 1978.
- [178] A. PETERS, K. YEOW CHUNG et S. CHU : Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. *Nature*, 400:849–+, août 1999.

- [179] S. POGGI, F. SALEMI, THE AURIGA COLLABORATION, L. CADONATI et THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION : Status of the LIGO-AURIGA Joint Burst Analysis. *J. Phys. Conf. Ser.*, 32:198–205, mars 2006.
- [180] R. V. POUND et G. A. REBKA : Resonant Absorption of the 14.4-keV γ Ray from 0.10- μ sec Fe^{57} . *Phys. Rev. Lett.*, 3:554–556, déc. 1959.
- [181] R. V. POUND et J. L. SNIDER : Effect of Gravity on Gamma Radiation. *Phys. Rev.*, 140:788–803, nov. 1965.
- [182] J. D. PRESTAGE, J. J. BOLLINGER, W. M. ITANO et D. J. WINELAND : Limits for spatial anisotropy by use of nuclear-spin-polarized Be-9(+) ions. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2387–2390, juin 1985.
- [183] G. E. PUGH : Proposal for a satellite test of the coriolis prediction of general relativity. *In Weapons System Evaluation Group Research Memorandum N.11 (The Pentagon, Washington)*, 1959.
- [184] M. PUNTURO : The virgo sensitivity curve. *Virgo note, code : VIR-NOT-PER-1390-51*, 2004.
- [185] E. M. RASEL, M. K. OBERTHALER, H. BATELAAN, J. SCHMIEDMAYER et A. ZEILINGER : Atom Wave Interferometry with Diffraction Gratings of Light. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2633–2637, oct. 1995.
- [186] S. REYNAUD et M.-T. JAEKEL : Long range gravity tests and the Pioneer anomaly. *ArXiv gr-qc*, 0610160, oct. 2006.
- [187] F. RIEHLE, T. KISTERS, A. WITTE, J. HELMCKE et C. J. BORDÉ : Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame - Sagnac effect in a matter-wave interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 67:177–180, juil. 1991.
- [188] B. RIEMANN : Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (mémoire présenté en 1854). *In Oeuvres mathématiques de Riemann / trad. par L. Laugel*. B.N.F., 1995. URL http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE{_}RIEMANN{_}{_}1.
- [189] P. G. ROLL, R. KROTKOV et R. H. DICKE : The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, 26:442–517, fév. 1964.
- [190] A. ROURA, D. R. BRILL, B. L. HU, C. W. MISNER et W. D. PHILLIPS : Gravitational wave detectors based on matter wave interferometers (MIGO) are no better than laser interferometers (LIGO). *Phys. Rev. D*, 73(8):084018–+, avr. 2006.

- [191] L. I. SCHIFF : Motion of a Gyroscope According to Einstein's Theory of Gravitation. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 46:871–882, juin 1960.
- [192] L. I. SCHIFF : Possible New Experimental Test of General Relativity Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 4:215–217, mars 1960.
- [193] E. SCHRÖDINGER : Quantisierung als Eigenwertproblem. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 384: 361–376, jan 1926.
- [194] E. SCHRÖDINGER : Quantisierung als Eigenwertproblem. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 386: 109–139, jun 1926.
- [195] E. SCHRÖDINGER : Energieaustausch nach der Wellenmechanik. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 388:956–968, 1927.
- [196] SELECTED LECTURES FROM HYPER SYMPOSIUM, nov. 2002 : URL http://sci2.esa.int/hyper/HyperSymposium1/HYPERCD/HYPERCD_fichiers/v3_slide0007.htm.
- [197] I. SHAPIRO : Solar system tests of general relativity : Recent results and present plans. In N. ASHBY, D. BARTLETT et W. WYSS, édés : *General Relativity and Gravitation*, p. 313–330, Cambridge, U.K., New York, U.S.A., 1990. Cambridge University Press.
- [198] S. SHAPIRO, J. DAVIS, D. LEBACH et J. GREGORY : Measurement of the solar gravitational deflection of radio waves using geodetic very-long-baseline interferometry data, 1979–1999. *Phys. Rev. Lett.*, 92:121101, 2004.
- [199] J. D. SMITH et D. J. TOMS : Bose-einstein condensation as symmetry breaking in compact curved spacetimes. *Phys. Rev. D*, 53(10):5771–5780, May 1996.
- [200] A. D. SPELIOTOPOULOS et R. Y. CHIAO : Differing Calculations of the Response of Matter-wave Interferometers to Gravitational Waves. *ArXiv gr-qc*, 0406096, juin 2004.
- [201] I. H. STAIRS, S. E. THORSETT et Z. ARZOUMANIAN : Measurement of Gravitational Spin-Orbit Coupling in a Binary-Pulsar System. *Phys. Rev. Lett.*, 93(14):141101–+, sept. 2004.
- [202] I. H. STAIRS, S. E. THORSETT, J. H. TAYLOR et A. WOLSZCZAN : Studies of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1534+12. I. Timing Analysis. *Astrophys. J.*, 581:501–508, déc. 2002.
- [203] P. L. STANWIX, M. E. TOBAR, P. WOLF, C. R. LOCKE et E. N. IVANOV : Improved test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire oscillators. *Phys. Rev. D*, 74(8):081101–+, oct. 2006.

- [204] L. STODOLSKY : Matter and light wave interferometry in gravitational fields. *Gen. Rel. Grav.*, 11:391–405, déc. 1979.
- [205] J. L. SYNGE : *Relativity, The general theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960, 1960.
- [206] C. TALMADGE, J.-P. BERTHIAS, R. W. HELLINGS et E. M. STANDISH : Model-independent constraints on possible modifications of Newtonian gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1159–1162, sept. 1988.
- [207] K. S. THORNE, C. M. CAVES, M. ZIMMERMANN, V. D. SANDBERG et R. W. P. DREVER : Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 40:667–671, mars 1978.
- [208] G. M. TINO et F. VETRANO : Is it possible to detect gravitational waves with atom interferometers? *Class. Quantum Grav.*, 24:2167–2178, avr. 2007.
- [209] P. TOURENC : Resonant interactions between a tensorial gravitational wave and a scalar wave. *Compt. Rend., Ser. A*, 274(25):1857–1860, 1972.
- [210] P. TOURENC : Effect of a gravitational wave on electromagnetic radiation confined in a cavity. I - Boundary coupling. II - Intrinsic coupling. *Gen. Rel. Grav.*, 9:123–153, fév. 1978.
- [211] P. TOURENC : Effect of a gravitational wave on electromagnetic radiation confined in a cavity : II. Intrinsic coupling. *Gen. Rel. Grav.*, 9:141–153, fév. 1978.
- [212] P. TOURENC : *Relativité et Gravitation*. Armand Colin Éditeur, Paris, 1992.
- [213] P. TOURENC : General relativity and gravitational waves. In M. BARONE, G. CALAMAI, M. MAZZONI, R. STANGA et F. VETRANO, eds : *Experimental Physics of Gravitational Waves*, p. 01–61. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.
- [214] P. TOURENC, M.-C. ANGONIN et X. OVIDO : Tidal Gravitational Effects in a Satellite. *Gen. Rel. Grav.*, 36:2237–2256, oct. 2004.
- [215] P. TOURENC et J.-L. CROSSIORD : Sur la détection d’ondes de gravitation par interactions résonantes avec un champ électromagnétique. *Nuovo Cim. B*, 19(1):105–121, 1974.
- [216] R. TREUHAFT et S. LOWE : A measurement of planetary relativistic deflection. *Astron. J.*, 102:1879–1888, 1991.

- [217] S. TURYSHEV, M. SHAO et K. NORDTVEDT : Experimental design for the later mission. *Int. J. Mod. Phys. D*, 13:2035–2063, 2004.
- [218] S. TURYSHEV, M. SHAO et K. NORDTVEDT : The laser astrometric test of relativity mission. *Class. Quantum Grav.*, 21:2773–2799, 2004.
- [219] W. G. UNRUH : Quantum nondemolition and gravity-wave detection. *Phys. Rev. D*, 19:2888–2896, mai 1979.
- [220] G. USHOMIRSKY, C. CUTLER et L. BILDSTEN : Deformations of accreting neutron star crusts and gravitational wave emission. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 319:902–932, déc. 2000.
- [221] J.-P. UZAN : The fundamental constants and their variation : observational and theoretical status. *Reviews of Modern Physics*, 75:403–455, avr. 2003.
- [222] T. VAN ZOEST *et al.* : Developments toward atomic quantum sensors. In *Complex Light and Optical Forces. Edited by Andrews, David L. ; Galvez, Enrique J. ; Nienhuis, Gerard. Proceedings of the SPIE, Volume 6483, pp. 648306.*, vol. 6483 de *Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*, fév. 2007.
- [223] G. VAROQUAUX, N. ZAHZAM, W. CHAIBI, J.-F. CLÉMENT, O. CARRAZ, J.-P. BRANTUT, R. A. NYMAN, F. PEREIRA DOS SANTOS, L. MONDIN, M. ROUZÉ, Y. BIDEL, A. BRESSON, A. LANDRAGIN et P. BOUYER : I.C.E. : An Ultra-Cold Atom Source for Long-Baseline Interferometric Inertial Sensors in Reduced Gravity. *ArXiv e-prints*, 07052922, mai 2007.
- [224] A. VECCHIATO, M. G. LATTANZI, B. BUCCIARELLI, M. CROSTA, F. DE FELICE et M. GAI : Testing general relativity by micro-arcsecond global astrometry. *Astronomy and Astrophysics*, 399:337–342, fév. 2003.
- [225] F. VETRANO, G. TINO et C. J. BORDÉ : Can we use atom interferometers in searching for gravitational waves? In *Aspen Winter Conference on Gravitational Waves*, 2004. URL http://www.ligo.caltech.edu/LIGO_web/Aspen2004/pdf/vetrano.pdf.
- [226] J.-Y. VINET : LISA and asteroids. *Class. Quantum Grav.*, 23:4939–4944, août 2006.
- [227] A. VOGEL *et al.* : Bose Einstein condensates in microgravity. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 84:663–671, sept. 2006.
- [228] R. V. WAGONER, C. M. WILL et H. J. PAIK : Tunable “free-mass” gravitational-wave detector. *Phys. Rev. D*, 19:2325–2329, avr. 1979.

- [229] S. WAJIMA, M. KASAI et T. FUTAMASE : Post-Newtonian effects of gravity on quantum interferometry. *Phys. Rev. D*, 55:1964–1970, fév. 1997.
- [230] J. WEBER : Detection and Generation of Gravitational Waves. *Phys. Rev.*, 117:306–313, jan. 1960.
- [231] J. WEISBERG et J. TAYLOR : General relativistic geodetic spin precession in binary pulsar b1913+16 : Mapping the emission beam in two dimensions. *Astrophys. J.*, 576:942–949, 2002.
- [232] J. WEISBERG et J. TAYLOR : The relativistic binary pulsar b1913+16 : Thirty years of observations and analysis. In F. RASIO et I. STAIRS, eds : *Binary Radio Pulsars*, vol. 328 de *ASP Conference Series*, p. 25–32, San Francisco, U.S.A., 2005. Astronomical Society of the Pacific.
- [233] J. T. WHELAN, S. BOSE, J. HANSON, I. S. HENG, W. W. JOHNSON, M. P. MCHUGH et P. ZHANG : A data analysis technique for the LIGO ALLEGRO stochastic background search. *Class. Quantum Grav.*, 22:1087–+, sept. 2005.
- [234] M. WILKENS, E. GOLDSTEIN, B. TAYLOR et P. MEYSTRE : Fabry-Pérot interferometer for atoms. *Phys. Rev. A*, 47:2366–2369, mars 1993.
- [235] C. M. WILL : Active mass in relativistic gravity : Theoretical interpretation of the kreuzer experiment. *Astrophys. J.*, 204:224–234, 1976.
- [236] C. M. WILL : *Was Einstein right ? Putting general relativity to the test*. New York : Basic Books, 1986, 1986.
- [237] C. M. WILL : Is momentum conserved? a test in the binary system psr 1913+16. *Astrophys. J. Lett.*, 393:L59–L61, 1992.
- [238] C. M. WILL : *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Theory and Experiment in Gravitational Physics, by Clifford M. Will, pp. 396. ISBN 0521439736. Cambridge, UK : Cambridge University Press, March 1993., 1993.
- [239] C. M. WILL : The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 9(3), 2006. URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>.
- [240] J. WILLIAMS, X. NEWHALL et J. DICKEY : Relativity parameters determined from lunar laser ranging. *Phys. Rev. D*, 53:6730–6739, 1996.
- [241] J. WILLIAMS, X. NEWHALL et J. DICKEY : Relativity parameters determined from lunar laser ranging. *Phys. Rev. D*, 53:6730–6739, 1996.

-
- [242] J. WILLIAMS, S. TURYSHEV et D. BOGGS : Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93:1–4, 2004.
- [243] J. WILLIAMS, S. TURYSHEV et T. MURPHY JR : Improving llr tests of gravitational theory. *Int. J. Mod. Phys. D*, 13:567–582, 2004.
- [244] P. WOLF, S. BIZE, A. CLAIRON, A. N. LUITEN, G. SANTARELLI et M. E. TOBAR : Tests of Lorentz Invariance using a Microwave Resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 90(6):060402–+, fév. 2003.
- [245] P. WOLF, F. CHAPELET, S. BIZE et A. CLAIRON : Cold Atom Clock Test of Lorentz Invariance in the Matter Sector. *Phys. Rev. Lett.*, 96(6):060801–+, fév. 2006.

Titre Outils théoriques pour la gravitation expérimentale et applications aux interféromètres et cavités à ondes de matière

Résumé La gravitation expérimentale a connu des développements spectaculaires ces vingt dernières années en partie grâce aux développements de la physique atomique. À l'aide de techniques de refroidissement sophistiquées, il est possible d'exploiter le comportement ondulatoire de la matière. L'interférométrie atomique est devenue une méthode de fabrication d'horloges et de senseurs inertiels parmi les plus précis et la condensation de Bose-Einstein permet l'observation de phénomènes quantiques macroscopiques. Dans cette thèse, nous explorons quelques applications possibles des ondes de matière pour les expériences de gravitation en champ faible. En première partie, nous développons des outils génériques pour la description théorique des expériences en relativité générale. Nous les appliquons dans la seconde partie : nous calculons la sensibilité des interféromètres à ondes de matière à l'effet Lense-Thirring, puis aux ondes gravitationnelles, et nous les comparons aux interféromètres laser. Enfin nous calculons la probabilité de changement d'état d'une cavité à onde de matière en interaction avec une onde gravitationnelle.

Mots-clés gravitation expérimentale, coordonnées de Fermi, ondes gravitationnelles, effet Lense-Thirring, interféromètre atomique, cavité atomique, onde de matière.

Title Theoretical tools for experimental gravitation and applications to matter wave interferometers and cavities

Abstract The experimental gravitation has experienced dramatic developments over the past twenty years thanks in part to the development of atomic physics. With the help of advanced cooling techniques, it is possible to exploit the wave behavior of matter. Atom interferometry has become a method for building clocks and inertial sensors among the most accurate and Bose-Einstein condensation allows the observation of macroscopic quantum phenomena. In this thesis, we explore some possible applications of matter wave experiments to probe the gravitation in the weak field approximation. In the first part, we develop generic tools for theoretical description of general relativity experiments. We apply them in the second part : we calculate the sensitivity of matter wave interferometers to Lense-Thirring, then to the gravitational waves, and we compare them to laser interferometers. Finally we calculate the transition probability of a matter wave cavity in interaction with a gravitational wave.

Keywords experimental gravitation, Fermi coordinates, gravitational waves, Lense-Thirring effect, matter wave interferometer, matter wave cavity.